# TUTORATO 7

## ESERCIZIO 1

Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T: V \longrightarrow V$ un endomorfismo tale che

1) $T(e_1+e_2) = k(e_1+e_2) + 2e_3$
2) $T(e_2) = ke_1 + 2e_3$
3) $T(\frac{1}{2}e_3) = k^2 e_2$

• Determinare i valori di $k$ per cui l'operatore $T$ è simmetrico:

$T$ è simmetrico $\iff$ $M_e(T)$ è simmetrico con $e$ base ortonormale

Calcoliamo $M_e(T)$:

$$T(e_1+e_2) = T(e_1) + T(e_2) = T(e_1) + ke_1 + 2e_3$$
$$\overset{\|}{k(e_1+e_2)+2e_3}$$

$$\Rightarrow \cdot\, T(e_1) = k(e_1+e_2) + 2e_3 - ke_1 - 2e_3 =$$
$$= 0 \cdot e_1 + ke_2$$

$\cdot\, T(e_2) = ke_1 + 2e_3$

$\cdot\, T(e_3) = 2k^2 e_2$

$$\Rightarrow M_e(T) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 2k^2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ è simmetrico $\iff$ $k = \pm 1$

• Per i valori di $k$ trovati, determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza $T$.

• $k=1 \rightsquigarrow M_B(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Troviamo una base ortonormale fatta da autovettori di $T$

Polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 2 \\ 0 & 2 & -t \end{vmatrix} = -t(t^2-4) + t = t(-t^2+4+1)$$
$$= t(-t^2+5)$$

$\Rightarrow$ autovalori

• $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{5}$ $t_3 = -\sqrt{5}$

Calcoliamo gli autospazi relativi a gli autovalori

• $V_0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_0 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \rangle$$

• $V_{\sqrt{5}}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = \frac{\sqrt{5}}{2} z \\ z = t \end{cases} \Rightarrow V_{\sqrt{5}} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{5}/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \rangle$$

• $V_{-\sqrt{5}}$ :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{2} z \\ z = t \end{cases} \Rightarrow V_{\sqrt{5}} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{5}/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_3} \right\rangle$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di autovettori di $T$ rendiamola ortonormale:

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = v_2/\sqrt{5/2}$$

prodotto scalare standard perché è una base ortonormale

$$v_3' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = v_2/\sqrt{5/2}$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_1/\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ La base ortonormale è

$$B = \{v_1', v_2', v_3'\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\sqrt{5} \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ La matrice che diagonalizza è

$$M = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & \sqrt{2}/2\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Verificare che i punti $\underset{P_1}{[1,2,2]}, \underset{P_2}{[3,2,4]}$ e $\underset{P_3}{[2,-1,2]} \in \mathbb{P}^2$ sono allineati e trovare l'eq. cartesiana della retta che li contiene.

Sol

Siano $v = (1,2,2)$, $W = (3,1,4)$, $Z = (2,-1,2) \in \mathbb{R}^3$

Allora

$[v] = [1,2,2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $[W] = [3,1,4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$[Z] = [2,-1,2]$

Sono allineati $\iff$ $v, W, Z$ sono linearmente dip.:

Applico Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sono lin. dip.}$$

Scriviamo l'equazione cartesiana della retta che li contiene:

(scegliamo la retta passante per $P_1$ e $P_3$, si avrà $P_2 \in r$ dato che sono allineati)

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_1$ passante i punti $[1,0,0]$ e $[0,1,2]$

e della retta $r_2$ passante per i punti $[2,0,0]$ e $[2,-3,1]$

Determinare quindi l'intersezione $r_1 \cap r_2$

Soluzione

- $r_1$: eq. parametriche $\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \mu \\ x_2 = 2\mu \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

eq cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x_0 \cdot 0 - x_1 \cdot (+2) + x_2$$

$\Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0$

- $r_2$: eq parametriche $\begin{cases} x_0 = 2\lambda + 2\mu \\ x_1 = -3\mu \\ x_2 = \mu \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

eq cartesiane:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = x_0 \cdot 0 - x_1 \cdot 2 + -6x_2$$

$\Rightarrow x_1 + 3x_2 = 0$

- $r_1 \cap r_2$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = t \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow r_1 \cap r_2 = [t : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$

ESERCIZIO 4

Si consideri lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3$.
Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano $\Pi_1$ generato dai punti

$[2, 2, -1, 1]$, $[1, 0, 1, 0]$ e $[0, 0, -1, 0]$

e del piano $\Pi_2$ generato dai punti $[2, 1, -1, -1]$

$[0, 4, 2, 0]$ e $[-1, 2, 0, 1]$

determinare le eq. parametriche e cartesiane della $\Pi_1 \cap \Pi_2$

Soluzione

• $\Pi_1$: eq. parametriche
$$\begin{cases} x_0 = 2\lambda + \mu \\ x_1 = 2\lambda \\ x_2 = -\lambda + \mu - n \\ x_3 = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda, \mu, n) \neq (0,0,0)$$

eq cartesiane

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3$$

• $\Pi_2$: eq parametriche
$$\begin{cases} x_0 = 2\lambda - n \\ x_1 = \lambda + 4\mu + 2n \\ x_2 = -\lambda + 2\mu \\ x_3 = -\lambda + n \end{cases}$$

eq cartesiane

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10x_0 - 2x_1 + 4x_2 + 14x_3$$

• $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} 10x_0 - 2x_1 + 4x_2 + 14x_3 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

↳ retta in $\mathbb{P}^3$

ESERCIZIO 5

a) Mostrare che date due rette sghembe $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ e un punto $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (r_1 \cup r_2)$ $\exists!$ retta $r$ passante per $P$ e incidente a $r_1$ e $r_2$

Sol

Sia $H_1 = L(P, r_1)$ e $H_2 = L(P, r_2)$

- $H_1 \neq H_2$: se fosse $H_1 = H_2$ allora $r_1, r_2 \subseteq H_1 = H_2$ e due rette in un piano proiettivo sono sempre incidenti

ASSURDO poiché $r_1$ e $r_2$ sono sghembe.

Sia $r = H_1 \cap H_2$:

- $r \cap r_1 \neq \emptyset$ poiché $r, r_1 \subseteq H_1$ (le due rette piano incidenti)
- $r \cap r_2 \neq \emptyset$ poiché $r, r_2 \subseteq H_2$
- ~~$P \in H$~~ $P \in H_1 \cap H_2$: infatti $P \in H_1 \cap H_2$

$\Rightarrow$ ~~tra~~ $H_1 \cap H_2$ è una retta che rispetta le proprietà richieste

UNICITÀ: sia $r$ che rispetta le proprietà

- $r \subseteq H_1$: $r$ è una retta passante per $P$ e un punto di $r_1 \Rightarrow r \subseteq L(P, r_1) = H_1$

- Analogamente $r \subseteq H_2$:

$\Rightarrow r \subseteq H_1 \cap H_2$ (stessa dimensione) $\Rightarrow r = H_1 \cap H_2$

b) Mostrare che le rette

- $r_1: x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$
- $r_2: x_0 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0$

Dobbiamo solo verificare che l'intersezione è VUOTO!

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 = x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 : [0,0,0,0] \notin \mathbb{P}^3$$

$$\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$$

c) Determinare la retta $r$ passante per $P = [0:1:1:0]$ e incidente a $r_1$, $r_2$

Soluzione

Nel punto (a) abbiamo mostrato che la retta richiesta è

$r = H_1 \cap H_2$ dove $H_1 = L(P, r_1)$ e $H_2 = L(P, r_2)$

$H_1$ :

Scrivo le eq param di $r_1$: $\begin{cases} x_0 = -x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 - x_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\lambda - \mu \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = -\lambda - \mu \end{cases}$$

$\Rightarrow r_1$ è lo spazio proiettivo generato dai punti

$P_0 = [-1:1:0:-1] = [v_0]$

$P_1 = [-1:0:1:-1] = [v_1]$

In quanto $L(P_0, P_1) = \mathbb{P}(\langle v_0, v_1 \rangle) = r_1$

$\Rightarrow L(P, r_1) = L(P, P_0, P_1) = H_1$

Scrivo le eq. cartesiane di $H_1$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - 2x_3$$

$H_2$ :

eq par di $r_2$ :

$$\begin{cases} x_0 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

sia $P_2 = [1 : -1 : 1 : 0]$, $P_3 = [0 : 0 : 0 : 1]$

$\Rightarrow L(P, r_1) = L(P, P_2, P_3) = H_2$ :

Sono le eq cartesiane di $H_2$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 + 2x_1 - x_3$$

$\Rightarrow$ $H_1 \cap H_2$ è la retta di equazione $\begin{cases} 2x_0 + 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 6

Siano $r, s$ rette in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$.
Mostrare che $r$ e $s$ sono sghembe se e solo se $\dim(r, s) = 3$

sol

~~Per la~~ la formula di Grassmann proiettiva si ha

$$\dim(r, s) + \dim(r \cap s) = \dim(r) + \dim(s)$$

$\Rightarrow$) Se $r \cap s = \emptyset$ ovvero sono sghembe si ha

$\dim(r \cap s) = \dim(\emptyset) = -1$

$\Rightarrow \dim(r, s) = -\dim(r \cap s) + \dim(s) + \dim(r) = 1 + 1 + 1 = 3$

$\Leftarrow$) Se $\dim(r, s) = 3$

$\Rightarrow \dim(r \cap s) = \dim s + \dim r - \dim L(r, s) = 1 + 1 - 3 = -1$

$\Rightarrow \dim(r \cap s) = -1 \Rightarrow r \cap s = \emptyset$ ovvero sono sghembe

ESERCIZIO 7 (c'era un ERRORE NEL TESTO!)

Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi.

Dimostrare che se $\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$

Soluzione

FORMULA DI GRASSMANN, siano $S_1, S_2$ sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ di dim finita

$\Rightarrow \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$

Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(W_2) \Rightarrow S_1 + S_2 = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

Da cui

$\dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2))$

$\geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) \geq 0$

Poiché $\dim \mathbb{P}(V) \geq \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2))$:

Abbiamo che $W_1 + W_2 \leq V$ come sottospazi di $V$

$\Rightarrow \dim(V) \geq \dim(W_1 + W_2) \Rightarrow \dim \mathbb{P}(V) \geq \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2))$

In definitiva $\dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$

ESERCIZIO 8

$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{K}}$

$$\pi_1 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 - 2X_0 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \end{cases}$$

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 2X_0 \\ X_2 + kX_4 = X_0 \end{cases}$$

(i)

$$\dim L(\pi_1, r_1) = \dim(\pi_1) + \dim(r_1) - \dim(\pi_1 \cap r_1)$$

$$\pi_1 \cap r_1 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \pi_1 \cap r_1 = \emptyset$$

$$\dim L(\pi_1, r_1) = 1 + 2 = 3$$

(ii)

$\dim L(\pi_2, \ell_2) = \dim(\pi_2) + \dim(\ell_2) - \dim(\pi_2 \cap \ell_2)$

$\pi_2 \cap \ell_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_1 = +x_4 \\ 2x_1 + x_4 = 2x_0 \\ K x_4 = x_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = -2K x_1 \\ x_0 = -K x_1 \\ x_4 = -x_1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} (1+2K)\, x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_1 \\ x_0 = -K x_1 \end{cases}$

SE $K \neq -1/2$ $\quad \pi_2 \cap \ell_2 = \emptyset$

SE $K = -1/2$ ALLORA

$\pi_2 \cap \ell_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_1 \\ x_0 = \frac{1}{2} x_1 \end{cases}$

$\rightarrow \pi_2 \cap \ell_2 = [\frac{1}{2}, 1, 0, 0, -1]$

AD OGNI MODO $\dim(\pi_2 \cap \ell_2) = 0$

E ABBIAMO

$\dim L(\pi_2, \ell_2) = 1 + 2 = 3$

(ii) 

4 PUNTI IN $\mathbb{P}^4_{\mathbb{K}}$ SONO IN POSIZIONE GENERALE SE E SOLO SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (POICHÉ $4 \leq 4+1 = 5$)

SCRIVIAMO $\pi_1, \pi_2, r_1, r_2$ IN FORMA PARAMETRICA

$\boxed{\pi_1}$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = t_1 \\ x_2 = q_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = -q_1 \end{cases} \quad [t_1, q_1] \in \mathbb{P}^1$$

UN PUNTO GENERICO DI $\pi_1$ SI SCRIVE COME $[0, t_1, q_1, t_1, -q_1]$ CON $[t_1, q_1] \in \mathbb{P}^1$

$\boxed{\pi_2}$

UN PUNTO GENERICO DI $\pi_2$ SI SCRIVE COME $[t_2, q_2, 0, 0, -q_2]$ CON $[t_2, q_2] \in \mathbb{P}^1$

$\boxed{r_1}$

UN PUNTO GENERICO DI $r_1$ SI SCRIVE COME $[a_1, 0, b_1, c_1, 0]$ CON $[a_1, b_1, c_1] \in \mathbb{P}^2$

$\boxed{L_2:}$ 

$$\begin{cases} X_0 = a_2 \\ X_1 = \frac{1}{2}(2X_0 - X_2 + 2X_3 - X_4) \\ X_2 = X_0 - k X_4 \\ X_3 = b_2 \\ X_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_0 = a_2 \\ X_1 = X_0 - \frac{1}{2}(X_0 - kX_4) + X_3 - \frac{1}{2} X_4 \\ X_2 = a_2 - k c_2 \\ X_3 = b_2 \\ X_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_0 = a_2 \\ X_1 = \frac{1}{2} X_0 + X_3 + \frac{k-1}{2} X_4 \\ X_2 = a_2 - k c_2 \\ X_3 = b_2 \\ X_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_0 = a_2 \\ X_1 = \frac{1}{2} a_2 + b_2 + \frac{k-1}{2} c_2 \\ X_2 = a_2 - k c_2 \\ X_3 = b_2 \\ X_4 = c_2 \end{cases}$$

UN PUNTO GENERICO DI $\ell^2$
SI SCRIVE COME

$$\left[a_2, \tfrac{1}{2}a_2 + b_2 + \frac{k-1}{2}c_2, a_2 - k c_2, b_2, c_2\right]$$

CON $[a_2, b_2, c_2] \in \mathbb{P}^2$

RICAPITOLANDO:

$P_1 = [0, T_1, q_1, T_1, -q_1]$

$P_2 = [T_2, q_2, 0, 0, -q_2]$

$Q_1 = [a_1, 0, b_1, c_1, 0]$

$Q_2 = \left[a_2, \frac{a_2}{2} + b_2 + \frac{k-1}{2}c_2, a_2 - k c_2, b_2, c_2\right]$

PROVIAMO A SCEGLIERE

$T_1 = 0 \qquad q_1 = 1$

$T_2 = 1 \qquad q_2 = 1$

$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad c_1 = 1$

$a_2 = 0 \qquad b_2 = 1 \qquad c_2 = 0$

LA MATRICE DEI PUNTI È

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$$

LA MATRICE $A$ HA RANGO 4, INFATTI HA UNA SOTTOMATRICE QUADRATA $4 \times 4$ CON DETERMINANTE NON NULLO (EVIDENZIATA).

PER LA SCELTA CHE ABBIAMO FATTO, INDIPENDENTE DA $k$, I PUNTI $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ SONO LINEARMENTI INDIPENDENTI, QUINDI SONO IN POSIZIONE GENERALE.

IN CONCLUSIONE, PER OGNI $k \in \mathbb{R}$ È POSSIBILE TROVARE $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$, $Q_1 \in s_1$, $Q_2 \in s_2$ IN MODO CHE $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ SIANO IN POSIZIONE GENERALE.

## ESERCIZIO 9

$$\overline{\pi_k}: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_0 = 0 \\ x_3 + k x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\Delta_k}: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + k x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\pi_k} \cap \overline{\Delta_k}: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_0 = 0 \\ x_3 + k x_0 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + k x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\pi_k} \cap \overline{\Delta_k}: \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k - k(-2) = 4k$$

SE $K \neq 0$ ALLORA $DET\,A \neq 0$, PERCIO' IL SISTEMA AMMETTE L'UNICA SOLUZIONE

$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (0,0,0,0) \notin \mathbb{P}^3$, QUINDI

LE RETTE SONO SGHEMBE

$(\overline{r}_K \cap \overline{s}_K = \emptyset)$

SE $K = 0$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^1$ SOLUZIONI:

$$\begin{cases} x_0 = -x_2 \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = -\lambda \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\overline{r}_K \cap \overline{s}_K = [-1, 1, 1, 0]$

LE RETTE SONO INCIDENTI IN UN PUNTO.