Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 7

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo tale che:

(i) $T(e_1 + e_2) = k(e_1 + e_2) + 2e_3$

(ii) $T(e_2) = ke_1 + 2e_3$

(iii) $T(\frac{1}{2}e_3) = k^2 e_2$

Determinare per quali valori di k l'operatore T è simmetrico; per tutti i valori di k trovati, determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.

Esercizio 2. Verificare che i punti $[1, 2, 2]$, $[3, 1, 4]$ e $[2, -1, 2] \in \mathbb{P}^2$ sono allineati e trovare l'equazione cartesiana della retta che li contiene.

Esercizio 3. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r_1 passante per i punti $[1, 0, 0]$ e $[0, 1, 2]$ e della retta r_2 passante per i punti $[2, 2, 0]$ e $[-2, 3, 1]$; determinare quindi l'intersezione $r_1 \cap r_2$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3$. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π_1 generato dai punti $[2, 2, -1, 1]$, $[1, 0, 1, 0]$ e $[0, 0, -1, 0]$ e del piano π_2 generato dai punti $[2, 1, -1, -1]$, $[0, 4, 2, 0]$ e $[-1, 2, 0, 1]$; determinare quindi le equazioni parametriche e cartesiane dell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$.

Esercizio 5.

(a) Mostrare che date due rette sghembe $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ e un punto $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (r_1 \cup r_2)$, esiste un'unica retta r passante per P e incidente a r_1 e r_2.

(b) Mostrare che le rette

$$r_1 \colon X_0 + X_1 + X_2 = 0,\ X_1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$r_2 \colon X_0 - X_2 = 0,\ X_1 + X_2 = 0,$$

sono sghembe.

(c) Determinare la retta r passante per $P = [0, 1, 1, 0]$ e incidente a r_1 e r_2.

Esercizio 6. Siano r, s rette in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$. Mostrare che r ed s sono sghembe se e solo se $\dim L(r, s) = 3$

Esercizio 7. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi. Dimostrare che se $\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$.

Esercizio 8. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^4_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_4$ consideriamo le rette

$$r_1 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = X_0 = 0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e i piani

$$p_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases} \qquad p_2 : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 2X_0 \\ X_2 + kX_4 = X_0 \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione di $L(r_1, p_1)$ e di $L(r_2, p_2)$.

(ii) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$, $Q_1 \in p_1$ e $Q_2 \in p_2$ tali che P_1, P_2, Q_1 e Q_2 sono in posizione generale.

Esercizio 9. Nello spazio euclideo reale E^3 consideriamo le rette di equazioni

$$r_k : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ z + k = 0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x - y = 0 \\ z + ky = 0 \end{cases}$$

Considerato $E^3 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}_k$ di r_k e $\overline{s}_k$ di s_k , e verificare se $\overline{r}_k$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti o sghembe al variare di $k \in \mathbb{R}$.