TUTORATO 8

ESERCIZIO 1

Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti condizioni

$$f(\underset{}{\overset{v_1}{[1,2]}}) = \overset{w_1}{[1,-2]}, \quad f(\overset{v_2}{[1,0]}) = \overset{w_2}{[1,1]}$$

$$f(\underset{v_3}{[-1,2]}) = \underset{w_3}{[2,1]}$$

La proiettività trovata è unica?

Soluzione

- Sappiamo che una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ viene indotta da un isomorfismo di spazi vettoriali $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall [v] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

Quindi per determinare f dobbiamo determinare φ.

Infatti quando determinato φ, abbiamo che $\forall P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ allora $P = [v]$ $v \in V \setminus \{0\}$ e abbiamo che $f([v]) = [\varphi(v)]$ ovvero abbiamo l'immagine di un qualsiasi punto!

- Vogliamo che la proiettività f rispetti le seguenti condizioni

- $f([v_1]) = [w_1]$ da cui:

$$[\varphi(v_1)] = f([v_1]) = [w_1] \Rightarrow \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\boxed{\varphi(v_1) = \lambda w_1}}$$

- $f([v_2]) = [w_2]$ da cui

$$[\varphi(v_2)] = f([v_2]) = [w_2] \Rightarrow \overset{\mu \in \mathbb{R}}{\boxed{\varphi(v_2) = \mu v_2}}$$

NOTA: V_1 e V_2 costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$

Per determinare l'isomorfismo tra gli spazi vettoriali dobbiamo capire dove mandare i vettori della base ⇒ dove mandiamo V_1 e V_2

Abbiamo che:
$$\varphi(V_1) = \lambda W_1 \Rightarrow \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-2\lambda\end{pmatrix}$$
$$\varphi(V_2) = \mu W_2 \Rightarrow \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\\mu\end{pmatrix}$$

⇒ Dobbiamo determinare λ e μ: (Useremo la terza condizione $f([V_3]) = [W_3]$)

Scriviamo V_3 come combinazione lineare di V_1 e V_2, si ha

$$V_3 = V_1 - 2V_2$$

e scriviamo W_3 come combinazione lineare di W_1 e W_2

$$W_3 = \frac{1}{3} W_1 + \frac{5}{3} W_2$$

→ questo si ottiene imponendo il sistema

$$\underset{W_3}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}} = \alpha \underset{W_1}{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}} + \beta \underset{W_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

risolvendo il sistema si ottiene $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\beta = \frac{5}{3}$

Ora vogliamo $\varphi(V_3) = W_3$ ⇒

$$\varphi(V_1) - 2\varphi(V_2) = \varphi(V_1 - 2V_2) = W_3 = \frac{1}{3} W_1 + \frac{5}{3} W_2$$

$$\Rightarrow \varphi(V_1) - 2\varphi(V_2) = \frac{1}{3} W_1 + \frac{5}{3} W_2 \quad \Leftrightarrow$$

$(\Leftarrow)$ $\lambda w_1 - 2\mu w_2 = \frac{1}{3} w_1 + \frac{5}{3} w_2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$\mu = -\frac{5}{6}$

$\Rightarrow$ la proiettività è data da

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$v_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$v_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -5/6 \\ -5/6 \end{pmatrix}$

Se volessimo scrivere la matrice rispetto alla base canonica $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ calcolo l'immagine di vettori della base canonica

- $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/6\\-5/6\end{pmatrix}$

- Scrivo $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ come combinazione lineare di v_1 e v_2 e ottengo $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5/6\\-5/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/12\\1/12\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ L'automorfismo associato alla proiettività è

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\underline{x} \longrightarrow \begin{pmatrix}-5/6 & 7/12\\-5/6 & 1/12\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La proiettività $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

è tale che $f([x_0 : x_1 \cancel{x_2}]) = [\varphi(x_0\ x_1 \cancel{\ })] =$

$$= \left[\begin{pmatrix}-5/6 & -7/12\\-5/6 & 1/12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= [-5/6\, x_0 + 7/12\, x_1 : -\tfrac{5}{6}x_0 + \tfrac{1}{12}x_1]$$

$$= [x_0 - \tfrac{7}{10}x_1 : x_0 + \tfrac{1}{10}x_1)$$

moltiplico per $-\frac{6}{5}$ tanto la classe è la stessa

$=)$

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$[x_0 : x_1] \longrightarrow \left[x_0 - \frac{1}{10}\, x_1 : x_0 + \frac{1}{10}\, x_1\right] \quad \square$$

La proiettività è unica?

Supponiamo che $\overbrace{P_0, P_1, P_2}^{n+2}$ e $\overbrace{P_0', P_1', P_2'}^{n+2}$ sono punti in posizione generale $\Rightarrow \exists!$

$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = P_i'$

$0 \leq i \leq n+1$

Sia $P_0 = [1,2]$, $P_1 = [1,0]$ e $P_2 = [-1,2]$

e

$P_0' = [1,-2]$, $P_1' = [1,1]$ e $P_2' = [2,1]$

abbiamo trovato f tale che $f(P_i) = P_i'$ $\forall i = \ldots$

La proiettività appena trovata è unica se

P_i con $i = 0,1,2$ sono in posizione generale

e

P_i' con $i = 0,1,2$ sono in posizione generale

- Vediamo se P_0, P_1, P_2 sono in posizione generale:
si ha se ogni sottoinsieme $\{P_i, P_j\}$ $i, j \in \{0,1,2\}$
è indipendente.

Ora è facile verificare che

$$\underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \text{ e } \underset{P_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \quad \underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \underset{P_2}{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}, \quad \underset{P_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \underset{P_2}{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}$$

sono indip $\Rightarrow$ sono in posizione generale

- Analogo ragionamento per P_0', P_1', P_2' $\Rightarrow$,
e si ottiene che sono in posizione generale

$\Rightarrow$ f è unica!

ESERCIZIO 2

Determinare il luogo dei punti fissi
di ciascuna delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Soluzione

Come determinare i punti fissi?

Vogliamo che $f([v]) = [v] \iff [\varphi(v)] = [v]$

$$\Downarrow$$

$$f[(v)] = [\varphi(v)]$$

$\iff \varphi(v) = \lambda v \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

in posizione generale:
$\{P_i, P_j\}$ $i,j \in \{0,1,2\}$

$\Big)$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
P_1 P_2

posizione generale

$P_0', P_1', P_2' \Rightarrow$,
posizione generale

punti fissi
punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)

$[\varphi(v)] = [v]$

$= [\varphi(v)]$

Ric: φ è un isomorfismo di spazi vettoriali
$\Rightarrow$ è determinato da una matrice

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longrightarrow A x \end{aligned} \quad \Rightarrow \varphi(v) = Av$$

Quindi $\varphi(v) = \lambda v \iff Av = \lambda v \iff v \in V_\lambda$

AUTOSPAZIO relativo all'autovalore λ

Distinguiamo i seguenti casi:

- Se $\dim V_\lambda = 1 \Rightarrow V_\lambda = \langle v \rangle$

$\Rightarrow$ il punto fisso è un punto
(poiché $\dim(\text{punto fisso}) = \dim V_\lambda - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ è un punto

- Se $\dim V_\lambda = 2$ $\rightsquigarrow V_\lambda = \langle v_1, v_2 \rangle$ $(\dim(\text{punto fisso}) = \dim V_\lambda - 1 = 2 - 1 = 1$
$\Rightarrow$ il punto fisso è una retta.

- Se $\dim V_\lambda = 3 \Rightarrow$ il punto fisso è un piano

$\dim(\text{punto fisso}) = 3 - 1 = 2$

Risoluzione ~~dell'esercizio~~

1) ~~$f([x_0, x_1, x_2]) = [-14x_0 + 94x_1 + 34x_2, 2x_1,$~~

- PASSIAMO ALL'ESERCIZIO

2) $f\,[x_0, x_1, x_2] = [4x_0, 2x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2]$

$\Rightarrow$ La proiettività è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = (4-t)\left[(2-t)(3-t) - 2\right] =$$

$$= (4-t)(6-2t-3t+t^2-2) =$$

$$= (4-t)(t^2-5t+4).$$

$t^2 - 5t + 4$ $\qquad = -(4-t)^2(t-1)$

$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Autovalori $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$ $\rightsquigarrow$ nei algebrici

Calcoliamo gli autospazi:

- V_{λ_1}:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Il punto fisso è un punto, il punto $[0 : -1 : 1]$

- V_{λ_2} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_0 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Il punto fisso è una retta, passante per i punti $[1;0,0]$, $[0;1,2]$:

~~Quindi la retta~~ ovvero $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

~~$\Rightarrow$ Il punto fisso è la retta $r: 2x_1 - 2x_2 = 0$~~

I punti fissi sono dati dalla retta

$$r: 2x_1 - 2x_2 = 0$$

1) $f([x_0, x_1, x_2]) = [4x_0 - 2x_1,\ 2x_0,\ 3x_2]$

L'automorfismo associato è dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$\gamma_A = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)\left(-t(4-t)-4\right) =$$

$$= (3-t)(t^2-4t-4)$$

Calcoliamo l'autovettore relativo autovalore $t=3$ (gli altri analogo)

$$V_{\lambda 3}: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 - 2x_1 = 0 \\ 3x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \qquad \Rightarrow V_{\lambda 3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Il punto fisso è punto $[0:0:1]$

$\dots x_0, 3x_2]$

dato dalle proiez

$4-t)-4) =$

$-4t-4)$

o otteniamo $t=3$

$) >$

$0:0:1]$

Es 3:

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti punti

$P_0=[1:0:1]$, $P_1=[0:1:1]$, $P_2=[1:1:0]$, $P_3=[-2:-1:3]$

$Q_0=[0:1:-1]$, $Q_1=[1:0:2]$, $Q_2=[1:1:0]$

$Q_3=[-1:6:-7]$

Stabilire se esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i)=Q_i$ $\forall\, i=0,1,2,3$ e se esiste è unica. In caso affermativo determinarla.

Sol.

- Si verifica che P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale
- Invece i punti Q_i non sono generali, infatti

$$(-1,6,-7)=7(0,1,-1)-(1,1,0)$$

$\Rightarrow$ i punti Q_0, Q_2, Q_3 sono allineati

$\Rightarrow$ se esiste una proiettività tale che $f(P_i)=Q_i$ non è detto che essa sia unica

Notiamo che non può esistere tale proiettività: infatti sia r la retta che contiene Q_0, Q_2, Q_3 e sia f la proiettività tale che $f(P_i)=Q_i$. Allora si avrebbe che $f^{-1}(r)$ sarebbe una retta che contiene $\underbrace{f^{-1}(Q_0)}_{=P_0}, \underbrace{f^{-1}(Q_2)}_{=P_2}, \underbrace{f^{-1}(Q_3)}_{=P_3}$

che è impossibile dato che P_0, P_2, P_3 non sono allineati!

ESERCIZIO 4

Determinare eventuali punti fissi e rette fisse della proiettività f in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Spiegare perché ogni proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha almeno un punto fisso.

Sol

- Come nell'es 2 i punti fissi si determinano calcolando gli autovettori associati ogni autovalore di A.

Svolgendo i calcoli si ottiene che l'unico autovalore è $\lambda = 3$ e $V_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ dim (punti fissi) = dim $V_\lambda - 1 = 0$

$\Rightarrow$ il punto fisso è un punto che è il punto $[1:0:0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

- Per rispondere alla domanda che ogni proiettività ha almeno un punto fisso notiamo che i punti fissi della proiettività si determinano con gli autovalori

$\Rightarrow$ In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una proiettività è definita da una matrice 3×3

$\Rightarrow P_A(\lambda)$ ha grado 3 $\Rightarrow$ ha sempre uno zero in $\mathbb{R}$

un polinomio di grado 3 in $\mathbb{R}$ ho sempre una radice reale
$\Rightarrow$ A ha sempre un autovettore $\Rightarrow$ un punto fisso

ESERCIZIO 6

Si calcoli il punto all'infinito (o punto improprio) di ciascuna delle seguenti rette r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ cioè il punto di intersezione $\bar{r} \cap H_0$, dove $\bar{r}$ è la chiusura proiettiva di r e H_0 è l'iperpiano $x_0 = 0$

1) $r: 3x_1 + x_2 + 1 = 0$

La chiusura proiettiva è $\bar{r}: 3x_1 + x_2 + x_0 = 0$

il punto all'infinito, $\bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:1:-3]\}$

2) $r: x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \Rightarrow \bar{r}: x_1 - 2x_2 - x_0 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:2:1]\}$

3) $r: 2i x_1 + 3x_2 + 9 = 0 \Rightarrow \bar{r}: 2i x_1 + 3x_2 + 9x_0 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} 2i x_1 + 3x_2 + 9x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0, -\frac{2}{3}i, 1]\}$

4) $r: x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \bar{r}: x_1 + x_0 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} x_1 + x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:0:1]\}$

$S/r: x_2 + 6 = 0 \Rightarrow r = x_2 + 6x_0 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} x_2 + 6x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:1:0]\}$

c) $r: x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \bar{r}: x_1 - 2x_2 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:2:1]\}$

Esercizio 7

In ciascuno dei seguenti casi, determinare l'intersezione $\bar{r}_1 \cap \bar{r}_2$, dove $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ sono rispettivamente le chiusure proiettive delle rette r_1 e r_2

Sol

1) $r: 3x + iy + 1 = 0$ e $s: x = y$

$\Rightarrow \bar{r}: 3x_1 + ix_2 + x_0$ e $\bar{s} = x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s} = \begin{cases} 3x_1 + ix_2 + x_0 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + ix_2 + x_0 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -x_2(3+i) \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s} = \{[3+i, 1, 1]\}$

2) $r: ix + (i+1)y - 1 = 0$ e $s: 2 - 2x = 0$

$\bar{r}: -ix_1 + (i+1)x_2 - x_0 = 0$ e $\bar{s}: 2x_0 - 2x_1 = 0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s}: \begin{cases} -ix_1 + (i+1)x_2 - x_0 = 0 \\ 2x_0 - 2x_1 = 0 \end{cases}$

$\bar{r} = x_2 + 6x_0 = 0$

$\begin{cases} x_2 + 6x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:1:0]\}$

$\Rightarrow \bar{r}: x_1 - 2x_2 = 0$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{r} \cap H_0 = \{[0:2:1]\}$

... queste cose, determinare ..., dove $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ sono rispettivamente ... delle rette r_1 e r_2

... e $s: x = 4$

... x_0 e $\bar{s} = x_1 - x_2 = 0$

... $x_2 + x_0 = 0$

... x_2

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -x_2(3+i) \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

... $, 1, 1]\}$

... e $s: 2 - 2x = 0$

... $x_0 = 0$ e $\bar{s}: 2x_0 - 2x_1 = 0$

... $+ (i+1)x_2 - x_0 = 0$

... $0 - 2x_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -i x_1 + (i+1)x_2 - x_1 = 0 \\ x_0 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (i+1)x_2 = (i+1)x_1 \\ x_0 = x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \{ x_1 = x_2 = x_0 \Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s} = \{[1:1:1]\}$

3) $r: x - 3y = i$ e $s: x - 3y + 4 = 0$

$\bar{r}: x_1 - 3x_2 = i x_0$ e $\bar{s}: x_1 - 3x_2 = 4x_0$

$\Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s}: \begin{cases} x_1 - 3x_2 = i x_0 \\ x_1 - 3x_2 = 4x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{r} \cap \bar{s} = \{[0:3:1]\}$

3) $f([x_0 : x_1 : x_2]) = [2x_0 + x_2, 2x_1, -x_0]$

La matrice dell'automorfismo associata a f è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico è $\begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} =$

$= (2-t)(-t(2-t)) + 1 \cdot (2-t) = (2-t)(-t+1)$

$\Rightarrow$ autovalori $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$

ESERCIZIO 5

INNANZITUTTO NOTIAMO CHE I PUNTI

$[1,2,1]$, $[3,-1,0]$, $[1,1,0]$, $[0,0,1]$

E I PUNTI

$[2,1,1]$, $[0,0,2]$, $[2,3,4]$, $[0,1,2]$

SONO IN POSIZIONE GENERALE, PER CUI LA PROIETTIVITÀ f È UNICAMENTE DETERMINATA

DETERMINIAMO $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ TALE CHE:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

HO UN SISTEMA LINEARE DI 13 INCOGNITE E 12 EQUAZIONI CHE PUÒ ESSERE SCRITTO IN MANIERA COMPATTA FISSANDO IL PARAMETRO $\lambda_4 = 1$ COME $A\bar{x} = b$ CON $A \in M_{12\times 12}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^{12}$

(VEDERE PROSSIMA PAGINA)

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

2

PASSANDO ALL'INVERSA DELLA MATRICE A OTTENIAMO LE SOLUZIONI

$$
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{-1}{2} & 1 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{-5}{36} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{-7}{12} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-14}{9} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & \frac{16}{9} & -1 \\
\frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-1}{8} & \frac{-25}{36} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{25}{12} & -2 & \frac{1}{2} & \frac{-25}{9} & 1 \\
\frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{7}{36} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{-7}{12} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{9} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-8}{9} & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{-14}{9} \\ 2 \\ \frac{-2}{9} \\ \frac{-7}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{28}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}
$$

PER CUI

$$M = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & -14/9 \\ 2 & -2/9 & -7/9 \end{pmatrix}$$

E LA PROIETTIVITÀ CHE CERCHIAMO È

$$f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[X_0, X_1, X_2] \longmapsto \left[\frac{2}{9}X_0 + \frac{2}{3}X_1, \frac{1}{3}X_0 + X_1 - \frac{14}{9}X_2, 2X_0 - \frac{2}{9}X_1 - \frac{7}{9}X_2\right]$$

ADESSO CONSIDERIAMO LA RETTA

$$r : X_0 + X_1 + X_2 = 0$$

IN FORMA PARAMETRICA

$$r : [X_0, X_1, X_2] = [T, 9, -T-9] \qquad [T, 9] \in \mathbb{P}^1$$

$$f([T, 9, -T-9]) =$$

$$= \left[\frac{2}{9}T + \frac{2}{3}9, \frac{1}{3}T + 9 + \frac{14}{9}T + \frac{14}{9}9, 2T - \frac{2}{9}9 + \frac{7}{9}T + \frac{7}{9}9\right] =$$

$$= [2T + 69, 3T + 99 + 14T + 149, 18T - 29 + 7T + 79] =$$

$$= [2T + 69, 17T + 239, 25T + 59]$$

L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI $f(r)$ È

$$f(r): [x_0, x_1, x_2] = $$
$$= [2T + 69,\ 17T + 239,\ 25T + 59]$$
$$[T, 9] \in \mathbb{P}^1$$

L'EQUAZIONE CARTESIANA DI $f(r)$ È

$$f(r): \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 17 & 25 \\ 6 & 23 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-490 x_0 + 140 x_1 - 56 x_2 = 0$$

$$-35 x_0 + 10 x_1 - 4 x_2 = 0$$