Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 8

Esercizio 1. Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f([1,2]) = [1,-2], \quad f([1,0]) = [1,1], \quad f([-1,2]) = [2,1].$$

La proiettività trovata è unica?

Esercizio 2. Determinare il luogo dei punti fissi di ciascuna delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

(*i*) $f([x_0,x_1,x_2]) = [-14x_0 + 94x_1 + 34x_2, 2x_1, 34x_0 + 34x_1 - 14x_2]$;

(*ii*) $f([x_0,x_1,x_2]) = [4x_0, 2x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2]$;

(*iii*) $f([x_0,x_1,x_2]) = [2x_0 + x_2, 2x_1, -x_0]$;

(*iv*) $f([x_0,x_1,x_2]) = [4x_0 - 2x_1, 2x_0, 3x_2]$.

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti punti

$$P_0 = [1,0,1], \quad P_1 = [0,1,1], \quad P_2 = [1,1,0], \quad P_3 = [-2,-1,3];$$
$$Q_0 = [0,1,-1] \quad Q_1 = [1,0,2], \quad Q_2 = [1,1,0], \quad Q_3 = [-1,6,-7];$$

Stabilire se esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 0,1,2,3$ e se essa è unica. In caso affermativo determinarla.

Esercizio 4. Determinare eventuali punti fissi e rette fisse della proiettività f in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Spiegare perché ogni proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha almeno un punto fisso.

Esercizio 5. Determinare la proiettività f in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare $f(r)$, dove $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Esercizio 6. Si calcoli il punto all'infinito (o punto improprio) di ciascuna delle seguenti rette r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, cioè il punto d'intersezione $\overline{r} \cap H_0$, dove $\overline{r}$ è la chiusura proiettiva di r, e $H_0 : \ x_0 = 0$.

(*i*) $r : \ 3x + y + 1 = 0$

(*ii*) $r : \ x - 2y - 1 = 0$

(*iii*) $r : \ 2ix + 3y + 9 = 0$

(*iv*) $r : \ x + 1 = 0$

(*v*) $r : \ y + 6 = 0$

(*vi*) $r : \ x - 2y = 0$

Esercizio 7. In ciascuno dei seguenti casi, determinare l'intersezione $\overline{r_1} \cap \overline{r_2}$, dove $\overline{r_1}$ e $\overline{r_2}$ sono rispettivamente le chiusure proiettive delle rette r_1 e r_2.

(*i*) $r_1 \ : \ 3x + iy + 1 = 0;$
$r_2 \ : \ x - y = 0;$

(*ii*) $r_1 \ : \ -ix + (i+1)y - 1 = 0;$
$r_2 \ : \ 2 - 2x = 0;$

(*iii*) $r_1 \ : \ x - 3y - i = 0;$
$r_2 \ : \ x - 3y + 4 = 0.$