TUTORATO 9

3) $\mathcal{C}: 2x_0^2 + 5x_0x_1 + 3x_0x_2 - 3x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$

Soluzione:

1) Sia $M_{\mathcal{C}}$ la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ allora

$$M_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3 & -3/2 \\ 3/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

e si ha che $\mathcal{C}$ ha equazione

$$x^t M_{\mathcal{C}}\, x = 0 \quad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

• LAVORIAMO SU $\mathbb{R}$:

Abbiamo che $M_{\mathcal{C}}$ è una matrice simmetrica ed è la matrice associata alla forma quadratica q data dall'equazione di $\mathcal{C}$

Quindi per il teorema di Silvester sappiamo che $\exists\, M \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che

$$M^t M_{\mathcal{C}} M = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = D \rightarrow \text{matrice di Silvester}$$

e la conica associata a D avrà equazione

$$x^t D\, x = 0 \rightarrow \text{FORMA CANONICA RICHIESTA}$$

• PROVIAMO A CAPIRE LA SEGNATURA CON IL CRITERIO DEI MINORI

- $D_1 = 2 > 0$
- $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$
- $D_3 = \det M_{\mathcal{C}} = -\frac{24629}{8} < 0$

$\Rightarrow r(M_e) = 3$ e la matrice è indefinite
$\Rightarrow$ su $\mathbb{R}$ è proiettivamente equivalente a
$e_1: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ o $e_2: x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$
ma sappiamo che una conica è una classe di equivalenza $\Rightarrow$ C_1 e C_2 rappresentano la stessa conica (infatti $e_2 = (-1)\, e_1$
con $\lambda \neq 0$)

$\Rightarrow$ In conclusione (per convenzione) diciamo che e è proiettivamente equivalente a e_1, dove e_1 ha equazione
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

- su $\mathbb{C}$ sappiamo che la conica ha rango 3 e quindi è proiettivamente equivalente a
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

2) TROVIAMO LA PROIETTIVITÀ che mette e in forma canonica:

- TROVIAMO un vettore non isotropo
sia $v = (1\ 0\ 0)$ allora
$q(v) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ è non isotropo

Cerchiamo $v^\perp$: sia $w \in v^\perp$ allora
il sottospazio

$\underset{(x\,y\,z)}{w}\, M_e\, v^T = 0 \iff$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3 & -3/2 \\ 3/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 0$$

$\iff 2x + 5/2\, y + 3/2\, z = 0 \iff 4x + 5y + 3z = 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4}t - \frac{3}{4}s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow V^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle$$

- Ora $v_1 \in V^{\perp}$, controllo se v_1 è non isotropo,

$q(v_1) = 50 + 100 - 48 = 102 \neq 0 \Rightarrow$ è non isotropo

Cerco $v_1^{\perp}$:

$$0 = (x\ y\ z)\ M_e \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 20 \\ 49/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$20x + 49/2\, y + 3/2\, z = 0 \Rightarrow$ eq cartesiana di $v_1^{\perp}$

Calcoliamo allora $V^{\perp} \cap v_1^{\perp}$:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 0 \\ 40x + 49y + 3z = 0 \end{cases} \leadsto \text{soluzione} \begin{cases} x = 33t \\ y = -27t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow V^{\perp} \cap v_1^{\perp} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 33 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w} \right\rangle$$

Vediamo se w è non isotropo

$q(w) = 1089 - 4455 + 99 - 2187 + 81 - 2 =$

$1269 - 7244 = -5975 \neq 0$

$\{ v, v_1, w \}$ è una base ortogonale

normalizziamo rispetto alla forma quadratica dato da C

- $v' = \frac{v}{\sqrt{q(v)>0}} = \frac{v}{\sqrt{2}}$

- $v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{q(v_1')>0}} = \frac{v_1}{\sqrt{102}}$

- $w' = \frac{w}{\sqrt{-q(w)}} = \frac{w}{\sqrt{5975}}$

~~Base~~ $B = \{ v', v_1', w' \}$ mette in forma canonica la matrice M_C, ovvero la matrice $M = ([v_1'] : [v_1'], [w'])$ è tale che

$$M^t M_C M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$q(v)>0$ $q(v_1)>0$ $q(w)<0$

La proiettività è data dalla matrice M

dove $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{102} & 33/\sqrt{5975} \\ 1/\sqrt{2} & 4/\sqrt{102} & -27/\sqrt{5975} \\ 1/\sqrt{2} & \cancel{5/\sqrt{102}} & 1/\sqrt{5975} \end{pmatrix} \rightarrow$ in $\mathbb{R}$

- In $\mathbb{C}$ ragionamento analogo solo che

$w' = \frac{w}{\sqrt{q(w)}} = \frac{w}{\sqrt{-5975}}$ e la forma canonica è $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

4) $\mathcal{C}: x_0^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$

$\rightarrow M_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Determiniamo la forma canonica

$D_1 = 1$

$D_2 = \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} \right| = 1$

$D_3 = \det M_{\mathcal{C}} = 0$

$\Rightarrow$ La matrice è semidefinita positiva o negativa o indefinita

Per capire la forma canonica dobbiamo capire la segnatura, $\Rightarrow$ procediamo con scrivere la matrice nella forma canonica di Sylvester

- Trovo un vettore non isotropo: $v = (1\ 0\ 0)$

$q(v) = 1 \neq 0 \Rightarrow v$ non è isotropo

Calcolo $v^{\perp}$:

$$(x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^{\perp} = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

• Prendo $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V^\perp$

Calcolo $q(v_2) = 1 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow$ è isotropo

$\Rightarrow$ cambio vettore

• Prendo $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V^\perp$

Calcolo $q(v_1) = 4 - \cancel{8} + 5 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ v_1 non è isotropo

$\Rightarrow$ Avrò una base della forma
$\langle v', v_1', w' \rangle$ con $w' \perp v', v_1'$

dove $v' = \frac{v}{\sqrt{+q(v)}}$ $(q(v) > 0)$

$v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{+q(v_1)}}$ $(q(v_1) > 0)$

$\Rightarrow$ So già che la forma canonica di SYLVESTER sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

la conica $\mathcal{C}$ sarà proiettivamente equivalente a

$x_0^2 + x_1^2 = 0$ su $\mathbb{R}$

• Anche ~~Mentre~~ su $\mathbb{C}$ alla $x_0^2 + x_1^2 = 0$

2) TROVIAMO LA PROIETTIVITÀ che trasforma la conica $\mathcal{C}$ nella conica $x_0^2 + x_1^2 = 0$

Lavoriamo su $\mathbb{R}$:

Abbiamo già trovato due vettori v, v_1 con $v \perp v_1$, vogliamo un 3 vettore ortogonale ad entrambi

Calcoliamo $V_1^\perp$:

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\overset{(x\,y\,z)}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \{\ y+z=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow\ V^\perp \cap V_1^\perp$:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \text{sol} \begin{cases} x=+t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow V^\perp \cap V_1^\perp = \left\langle \underset{\substack{\shortparallel \\ W}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

e $W=(1\ -1\ 1)$

è tale che

$q(W) = 1-4+2+5-6+2 = 0$

$\Rightarrow \{v_1', v_1', W\}$ è la base che cerchiamo

M_e in forma canonica $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

La proiettività è data dalla matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(NOTA che v_1 e $V^\perp$ avevano norma 1 rispetto alla forma quadratica q)

e si ha che $\quad M^t M_e M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Possiamo scrivere esplicitamente la proiettività

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$[x_0 : x_1 : x_2] \longrightarrow [x_0 - 2x_1 + x_2 : x_1 - x_2 : x_2]$$

NOTA: su $\mathbb{C}$ è tutto analogo.

ESERCIZIO 3

Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{C}_k$ la conica proiettiva reale di equazione

$$x_0^2 + 2k x_0 x_2 + x_1^2 + k x_2^2 = 0$$

1) Determinare per quali k si ha che $\mathcal{C}_k$ è semplicemente degenere, doppiamente degenere o non degenere

$$M_{\mathcal{C}_k} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(M_{\mathcal{C}_k}) = k(1-k^2) = 0$

$\Leftrightarrow$ se $k = 0, \pm 1$

- Se $k = 0, \pm 1$ si ha $\text{rk}(M_{\mathcal{C}_k}) = 2 \Rightarrow$ la conica è semplicemente degenere
- Se $k \neq 0, \pm 1$ la conica è non degenere

2) Determinare una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella eq canonica.

Abbiamo $M_{\mathcal{C}_k} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ è una matrice

simmetrica $\Rightarrow$ per il teorema spettrale $\exists$

una matrice $M \in O(n)$ tale che

$$M^t A_{\mathcal{C}} M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

e la conica associata alla matrice D sarà: $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 x_2^2$ (*)

e la proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ in (*) è data dalla matrice M.

Se applichiamo un'altra proiettività della forma

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{|\lambda_1|}} \\ x_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{|\lambda_2|}} \\ x_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{|\lambda_2|}} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ si ottiene la forma canonica richiesta

Procediamo con l'esercizio

Calcoliamo gli autovalori

$$\begin{vmatrix} 1-t & k & 0 \\ k & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & k-t \end{vmatrix} = (k-t)\left[(1-t)^2 - k^2\right] =$$

$$= (k-t)(\cancel{k}\ 1-t-k)(1-t+k)$$

$$= (-t+k)(-t+1-k)(-t+k+1)$$

Autovalori

$t_1 = k$
$t_2 = -k+1$
$t_3 = k+1$

Autovettori

- V_k :

$$\begin{pmatrix} 1-k & k & 0 \\ k & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-k)x + ky = 0 \\ kx + (1-k)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

~~Distinguiamo i casi~~

- ~~$k=0$ $\Rightarrow$ $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$~~
- ~~$k=1$ $\Rightarrow$ $V_1 = \langle$~~

$\Rightarrow \forall k$ si ha $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $= v_1$

- V_{-k+1} :

$$\begin{pmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} kx + ky = 0 \\ kx + ky = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-k+1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = v_2$$

$\forall k \in \mathbb{R}$

- V_{k+1} : $\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{k+1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = v_3$

$\Rightarrow$ sia $\quad v_1' = \dfrac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} = v_1$

$$v_2' = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2\rangle}} = \frac{v_2}{\sqrt{2}}$$

$$v_3' = \frac{v_3}{\sqrt{\langle v_3 v_3\rangle}} = \frac{v_3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ $B = \{v_1', v_2', v_3'\}$ è la base che rende M_{e_k} diagonale ovvero

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è tale che

$$M^t M_{e_k} M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

ovvero M è la proiettività che trasforma e_k nella canonica

$$k x_0^2 + (-k+1) x_1^2 + (k+1) x_2^2 = 0$$

Distinguiamo i casi

- $k = 0$: la conica è in forma canonica $\quad x_1^2 + x_2^2 = 0$
- $k = 1$: $\quad x_0^2 + 2 x_2^2 = 0$

$\Rightarrow$ Applico la proiettività

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{la conica diventa} \quad x_0^2 + 2 x_2^2$$

• $k = -1$: $\rightsquigarrow$ $-x_0^2 - 2x_{\cancel{1}}^2 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{|-1|}} \\ x_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{|-2|}} \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la conica è poi equale a $x_0^2 + x_1^2 = 0$

• $k \neq 0, 1, -1$: $k x_0^2 + (-k+1) x_{\cancel{1}}^2 + (k+1) x_2^2 = 0$

• $k < -1$:

Applico la proiettività

$$\begin{cases} x_0' = \dfrac{x_0}{\sqrt{-k}} \\ x_1' = \dfrac{x_1}{\sqrt{-k+1}} \\ x_2' = \dfrac{x_2}{\sqrt{-(k+1)}} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{la conica diventa}}$ $-x_0^2 + x_1^2 \mp x_2^2 = 0$

Che è equivalente a $x_0^2 \mp x_1^2 + x_2^2 = 0$

$\Rightarrow$ Applico un'altra proiettività

$$\begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{Diventa}}$ $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\downarrow$

Forma CANONICA

• $-1 < k < 0$:

$$\begin{cases} x_0' = \dfrac{x_0}{\sqrt{-k}} \\ x_1' = \dfrac{x_1}{\sqrt{\mp(k+1)}} \\ x_2' = \dfrac{x_2}{\sqrt{k+1}} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $-x_0^2 \mp x_1^2 + x_2^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_0 = x_2 \\ x_1 = x_1 \\ x_2 = x_0 \end{cases}$

~~Che è equivale a~~

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

- $0 < k < 1$:

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{k}} \\ X_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{-k+1}} \\ X_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{k+1}} \end{cases} \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

- $k > 1$:

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{k}} \\ X_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{-(-k+1)}} \\ X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \end{cases} \Rightarrow x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$\Rightarrow$ cambio di coordinate

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_1 \end{cases} \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

ESERCIZIO 1 (i)

$$C: \quad x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET } M_C = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 3 = -9$$

IL PRIMO MINORE PRINCIPALE È $1 > 0$

$\rightarrow$ M_C HA DET $\neq 0$ E NON È NE DEFINITA POSITIVA NE DEFINITA NEGATIVA

$\rightarrow$ LA FORMA CANONICA DI C È

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad \text{SU } \mathbb{R}$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad \text{SU } \mathbb{C}$$

METTIAMO M_C IN FORMA CANONICA

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È NON ISOTROPO:

$$V_1^T \cdot M_C \cdot V_1 = 1$$

PONIAMO

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow x + 2y - z = 0$$

SCEGLIAMO $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(0 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$$

PONIAMO

$$\begin{cases} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0 \\ (x\ y\ z)\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ z=-y \end{cases}$$

SCELGO $V_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$(3\ -1\ 1)\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=(3\ -1\ 1)\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}=-9$$

LA BASE $\left\{V_1, \frac{V_2}{3}, \frac{V_3}{3}\right\}$ METTE IN FORMA CANONICA LA MATRICE M_C SU $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&2/3\\1&-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1/3&-1/3\\0&2/3&1/3\end{pmatrix}$$

UNA PROIETTIVITÀ CHE METTE C IN FORMA CANONICA SU $\mathbb{R}$ È

$$T([x_0,x_1,x_2])=\left[x_0+x_2,\ \tfrac{1}{3}x_1-\tfrac{1}{3}x_2,\ \tfrac{2}{3}x_1+\tfrac{1}{3}x_2\right]$$

4

LA BASE $\left\{v_1, \frac{v_2}{3}, \frac{v_3}{3i}\right\}$ METTE IN FORMA CANONICA LA MATRICE M_C SU $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/i & -1/3i & 1/3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/i \\ 0 & 1/3 & -1/3i \\ 0 & 2/3 & 1/3i \end{pmatrix}$$

UNA PROIETTIVITÀ CHE METTE C IN FORMA CANONICA $\mathbb{C}$ È

$$T([x_0, x_1, x_2]) = \left[x_0 + \frac{x_2}{i}, \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3i}x_2, \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3i}x_2\right]$$

ESERCIZIO 1 (ii)

$$C: 2x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$$

$$M_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$2 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 = 7 > 0$

M_C È DEFINITA POSITIVA, QUINDI LA FORMA CANONICA DI C È

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

SIA SU $\mathbb{R}$ CHE SU $\mathbb{C}$

METTIAMO M_C IN FORMA CANONICA

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È NON ISOTROPO:

$$v_1^T M_C v_1 = 2$$

PONIAMO

$$(x \ y \ z)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x - y = 0$$

SCEGLIAMO $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(1 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

PONIAMO

$$\begin{cases} (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2z = -3y \end{cases}$$

SCEGLIAMO $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$(1 \quad 2 \quad -3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \quad 2 \quad -3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = 21$$

LA BASE $\left\{ \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \frac{v_2}{\sqrt{6}}, \frac{v_3}{\sqrt{21}} \right\}$ METTE IN FORMA CANONICA M_C SIA SU $\mathbb{R}$ CHE SU $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{21} & -3/\sqrt{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{21} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{21} \\ 0 & 0 & -3/\sqrt{21} \end{pmatrix}$$

UNA PROIETTIVITÀ CHE METTE C IN FORMA CANONICA SIA SU $\mathbb{R}$ CHE SU $\mathbb{C}$ È

$$T([x_0, x_1, x_2]) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{21}}x_2, \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{21}}x_2, -\frac{3}{\sqrt{21}}x_2\right]$$

ESERCIZIO 2

$$C: x^2+2xy-4y-1=0$$

(i)

$$\bar{C}: x_1^2+2x_1x_2-4x_0x_2-x_0^2=0$$

(ii)

$$\begin{cases} x_1^2+2x_1x_2-4x_0x_2-x_0^2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad x_1^2+2x_1x_2=0$$

$$x_1(x_1+2x_2)=0$$

QUINDI

$x_0=x_1=0,\ x_2\neq 0 \longrightarrow P=[0,0,1]$

OPPURE

$x_0=0,\ x_1=-2x_2\neq 0 \longrightarrow P=[-2,1,0]$

(iii), (iv)

$$M := M_{\bar{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)-2\cdot(2) = -3 \neq 0$$

$\bar{C}$ È UNA CONICA GENERALE OPPURE UNA CONICA GENERALE A PUNTI NON REALI, PER CAPIRLO CERCHIAMO LA FORMA CANONICA DI SYLVESTER DI M

$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ È NON ISOTROPO

$$(0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

PONIAMO

$$(x \ y \ z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \ y \ z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$y + z = 0$$

SCEGLIAMO $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(0 \ 1 \ -1)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

PONIAMO

$$\begin{cases} (x \ y \ z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x \ y \ z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -z \\ 2x = -z \end{cases}$$

SCEGLIAMO $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$(1 \ \ 2 \ -2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2 \ -2)\begin{pmatrix} -1+4 \\ 2-2 \\ -2+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ \ 2 \ -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

QUINDI LA BASE $\left\{ v_1, \frac{v_3}{\sqrt{3}}, v_2 \right\}$

METTE M IN FORMA CANONICA DI SYLVESTER

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2/\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

QUINDI L'EQUAZIONE CANONICA DI $\overline{C}$ È

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

AVREMMO POTUTO DEDURRE LO STESSO OSSERVANDO CHE M HA DETERMINANTE NON NULLO E NON È NE DEFINITA POSITIVA NE DEFINITA NEGATIVA (UTILIZZANDO IL CRITERIO DEI MINORI PRINCIPALI)

UNA PROIETTIVITÀ CHE METTE $\mathcal{C}$ IN FORMA CANONICA È QUELLA DEFINITA DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2/\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

$$T: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[x_0, x_1, x_2] \longmapsto \left[x_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_1, \frac{2}{\sqrt{3}}x_1 + x_2, -\frac{2}{\sqrt{3}}x_1 - x_2\right]$$

(v)

SU $\mathbb{C}$ L'EQUAZIONE CANONICA DI $\mathcal{C}$ È

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

E UNA PROIETTIVITÀ CHE METTE $\mathcal{C}$ IN FORMA CANONICA È

$$T: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[x_0, x_1, x_2] \longmapsto \left[x_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_1, \frac{2}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{x_2}{i}, -\frac{2}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{x_2}{i}\right]$$

ESERCIZIO 4

$C_h: \quad 2hx_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$

$D_k: \quad 4kx_0x_1 - 2k^2x_0x_2 + x_2^2 = 0$

$$M_{C_h} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{D_k} = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -k^2 \\ 2k & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DET}\begin{pmatrix} -\lambda & h & 0 \\ h & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - h(-h\lambda) = -\lambda^3 + (h^2+1)\lambda =$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - (h^2+1)\right]$$

GLI AUTOVALORI DI M_{C_h} SONO

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = +\sqrt{h^2+1} \qquad \lambda_3 = -\sqrt{h^2+1}$$

NE DEDUCIAMO CHE $\forall h \in \mathbb{R}$
L'EQUAZIONE CANONICA DI C_h È

$$x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2k & -k^2 \\ 2k & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2k\begin{vmatrix} 2k & 0 \\ -k^2 & 1 \end{vmatrix} = -4k^2$$

VOGLIAMO CHE D_k SIA DEGENERE,

IMPONIAMO QUINDI $k=0$

$$M_{D_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{RANK } M_{D_0} = 1$$

QUINDI D_0 È DOPPIAMENTE DEGENERE

E LA SUA EQUAZIONE CANONICA È

$$x_0^2 = 0$$

NE DEDUCIAMO CHE PER NESSUNA

SCELTA DI h E k LE CONICHE C_h E D_k

SONO PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI

ESERCIZIO 5

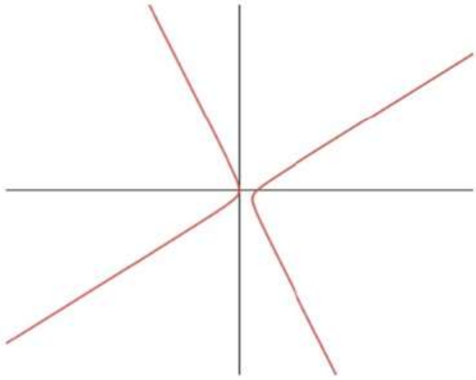
$$C_k : x^2 - 4k^2 y^2 + 2(k-1)xy - 2k^2 x = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$M_{C_k} = \begin{pmatrix} 0 & -k^2 & 0 \\ -k^2 & 1 & k-1 \\ 0 & k-1 & -4k^2 \end{pmatrix}$$

$$\det M_{C_k} = k^2 \begin{vmatrix} -k^2 & k-1 \\ 0 & -4k^2 \end{vmatrix} =$$

$$= k^2 (4k^4) = 4k^6$$

SE $k \neq 0$ C_k È NON DEGENERE



PONIAMO $k = 0 \longrightarrow M_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

RANK $M_{C_0} = 2$ QUINDI C_0 È SEMPLICEMENTE DEGENERE