Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 9

Esercizio 1. In ciascuno dei seguenti casi, classificare la conica $\mathcal{C}$ definita su $\mathbb{P}^2_K$, determinandone il rango e la forma canonica, nel caso in cui $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$; oltretutto determinare la proiettività che mette $\mathcal{C}$ in forma canonica.

(i) $\mathcal{C} : x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$

(ii) $\mathcal{C} : 2x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$

(iii) $\mathcal{C} : 2x_0^2 + 5x_0x_1 + 3x_0x_2 - 3x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$

(iv) $\mathcal{C} : x_0^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$

Esercizio 2. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ definita su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dall'equazione

$$\mathcal{C} : \ X^2 + 2XY - 4Y - 1 = 0$$

(i) Determinare la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$;

(ii) Calcolare i punti impropri di $\mathcal{C}$;

(iii) Classificare la conica $\overline{\mathcal{C}}$ e scriverla in forma canonica;

(iv) Trovare una proiettività $T \in PGL(3)$ tale che $T^{-1}\left(\overline{\mathcal{C}}\right)$ sia in forma canonica;

(v) Come cambiano le risposte sopra se lavorassimo su $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$?

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{C}_k$ la conica proiettiva reale di equazione

$$x_0^2 + 2kx_0x_2 + x_1^2 + kx_2^2 = 0$$

(*i*) Determinare per quali k si ha che $\mathcal{C}_k$ è semplicemente degenere o doppiamente degenere;

(*ii*) Determinare una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica.

Esercizio 4. Si considerino le seguenti coniche proiettive reali:

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_h : 2hx_0x_1 - 2x_1x_2 = 0 \\ \mathcal{D}_k : 4kx_0x_1 - 2k^2x_0x_2 + x_2^2 = 0 \end{gathered}$$

Determinare per quali valori di $k, h \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathcal{C}_h$ e $\mathcal{D}_k$ sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 5. Si considerino le coniche affini reali

$$\mathcal{C}_k : X^2 - 4k^2Y^2 + 2(k-1)XY - 2k^2X = 0, \;\; k \in \mathbb{R}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se $\mathcal{C}_k$ è non degenere, semplicemente degenere o doppiamente degenere.