

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2025-2026

Prova scritta del 18-2-2026

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k .

(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k .

Consideriamo ora i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e la struttura corrispondente di spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia T_k un operatore su $\mathbb{R}^3$ tale che $M_E(T_k) = A_k$. Determinare un operatore T' su $\mathbb{R}^3$, e una sua matrice, in modo che $T_k - T'$ è unitario.

(d) Calcolare l'angolo tra E_2 ed E_3 .

SOLUZIONE:

(a) e (b) Il polinomio caratteristico di A_k è

$$\begin{vmatrix} 1 - T & k & 0 \\ k & 1 - T & 0 \\ 0 & 0 & k - T \end{vmatrix} = (k - T)(T - k - 1)(T + k - 1)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = 1 + k, \lambda_3 = 1 - k.$$

Come sappiamo A_k è diagonalizzabile e sulla diagonale ci andranno gli autovalori.

Ora, se $k > 0$, abbiamo che $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 1 + k > 0$, mentre $\lambda_3 = 1 - k \geq 0$ se e solo se $k \leq 1$. Se $k = 0$ abbiamo che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 > 0$, mentre se $k < 0$, abbiamo che $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 1 + k \geq 0$ se e solo se $k \geq -1$ e $\lambda_3 = 1 - k > 0$. Pertanto, la forma canonica

di Sylvester di b_k sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = -1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < 0 \text{ o se } k > 1;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k \in \{0, 1\} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } 0 < k < 1.$$

Sia ora λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + ky = 0 \\ kx + (1-\lambda)y = 0 \\ (k-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

del quale troviamo le soluzioni.

Se $\lambda = k$ il sistema è

$$\begin{cases} (1-k)x + ky = 0 \\ kx + (1-k)y = 0 \end{cases}$$

e possiamo scegliere $x = y = 0, z = 1$, quindi $v_1 = (0, 0, 1)$.

Se $\lambda = 1 + k$ il sistema è

$$\begin{cases} -kx + ky = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e possiamo scegliere $x = y = 1, z = 0$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Se $\lambda = 1 - k$ il sistema è

$$\begin{cases} kx + ky = 0 \\ (2k-1)z = 0 \end{cases}$$

e possiamo scegliere $x = -1, y = 1, z = 0$ e $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$.

Pertanto una base ortonormale di autovettori sarà $\{v_1, v_2, v_3\}$ e quindi avremo una matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $\det M = 1$, quindi $M \in SO(3)$.

Supponiamo ora $0 < k < 1$ in modo che b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(c) Come è noto, $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ è unitario in qualsiasi prodotto scalare, quindi, posto $T_k - T' = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ abbiamo che $T' = T_k - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ e, per esempio, nella base E ,

$$M_E(T') = M_E(T_k - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = M_E(T_k) - M_E(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = A_k - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(d) Nel prodotto scalare definito da b_k su $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\langle E_2, E_3 \rangle = b_k(E_2, E_3) = 0$$

da cui deduciamo che l'angolo tra E_2 ed E_3 è $\frac{\pi}{2}$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ con coordinate X, Y, Z , consideriamo la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} X - Y = 1 \\ X + Z = 2 \end{cases}$$

e la retta s passante per $Q = Q(1, \sqrt{2}, 0)$ e giacitura $\langle E_3 \rangle$.

(a) Determinare se esiste un'isometria $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tale che $d(f(r), f(s)) = 2$.

Sia ora $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$ e siano $\bar{r}, \bar{s}$ le chiusure proiettive.

(b) Determinare tutti i punti $P \in \mathbb{P}^3$ tali che $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) \neq \{P\}$.

(c) Consideriamo ora $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ con coordinate omogenee $X_0, \dots, X_4$ e sia p_k il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^4$ di equazioni

$$p_k : \begin{cases} X_0 - kX_1 = 0 \\ kX_2 + kX_4 = 0 \end{cases}.$$

Determinare per quali i valori di k (se esistono) si ha che $L(\bar{r}, \bar{s}) = p_k$.

SOLUZIONE:

(a) Dal sistema che definisce r osserviamo che $Q' = Q'(0, -1, 2) \in r$, mentre la sua giacitura è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(r) : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X + Z = 0 \end{cases}$$

che sono tutte del tipo $(-t, -t, t) = -t(1, 1, -1)$, dunque $\text{giac}(r) = \langle (1, 1, -1) \rangle$.

Poiché $\text{giac}(s) = \langle E_3 \rangle$, deduciamo che r ed s non sono parallele. Inoltre, le equazioni cartesiane di s sono

$$s : \begin{cases} X = 1 \\ Y = \sqrt{2} \end{cases}$$

quindi $r \cap s = \emptyset$ e pertanto r ed s sono sghembe. È facile vedere (la dimostrazione è qui sotto) che, se f è un'isometria, allora anche $f(r)$ e $f(s)$ sono sghembe e $d(r, s) = d(f(r), f(s))$. Ma

$$d(r, s) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2}} = 1.$$

Dunque una f come in (a) non esiste.

Qui la dimostrazione del fatto asserito sopra.

Siano r ed s due rette sghembe e sia $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ un'isometria, con operatore unitario associato φ . Se $r = S_{R, \langle v_r \rangle}$, $s = S_{R', \langle v_s \rangle}$, si ha che $f(r) = S_{f(R), \langle \varphi(v_r) \rangle}$, $f(s) = S_{f(R'), \langle \varphi(v_s) \rangle}$. Se $f(r)$ e $f(s)$ fossero parallele, si avrebbe che $\varphi(v_r) = a\varphi(v_s)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, quindi $\varphi(v_r - av_s) = 0$ da cui $v_r - av_s = 0$, contraddicendo il fatto che r ed s non sono parallele. Se $f(r) \cap f(s) \neq \emptyset$ allora esiste un punto $P \in f(r) \cap f(s)$, diciamo $P = f(T) = f(T')$ con $T \in r$, $T' \in s$. Ma allora $0 = d(f(T), f(T')) = d(T, T')$, da cui $T = T'$, contraddicendo il fatto che $r \cap s = \emptyset$.

Come è noto, esiste un unico punto $N \in r$ ed un unico punto $N' \in s$ tali che $\overrightarrow{NN'} \perp r$, $\overrightarrow{NN'} \perp s$. Ora

$$0 = \langle \overrightarrow{NN'}, v_r \rangle = \langle \varphi(\overrightarrow{NN'}), \varphi(v_r) \rangle = \langle \overrightarrow{f(N)f(N')}, \varphi(v_r) \rangle$$

e analogamente per s . Quindi, gli unici punti in $f(r)$ ed in $f(s)$ tali che il loro vettore è ortogonale a $\varphi(v_r)$ e $\varphi(v_s)$ sono $f(N)$ e $f(N')$. Pertanto

$$d(r, s) = \|\overrightarrow{NN'}\| = \|\overrightarrow{f(N)f(N')}\| = d(f(r), f(s)).$$

(b) Abbiamo che $\bar{r} \cap \bar{s} = \emptyset$ dato che r ed s sono sghembe in $\mathbb{A}^3$ (oppure il fatto che $\bar{r} \cap \bar{s} = \emptyset$ si può verificare facilmente dalle loro equazioni proiettive

$$\bar{r} : \begin{cases} -X_0 + X_1 - X_2 = 0 \\ -2X_0 + X_1 + X_3 = 0 \end{cases}, \bar{s} : \begin{cases} -X_0 + X_1 = 0 \\ -\sqrt{2}X_0 + X_2 = 0 \end{cases}.)$$

Sia ora $P \in \mathbb{P}^3$. Se $P \in \bar{r}$ allora $P \notin \bar{s}$, quindi $L(\bar{r}, P) = \bar{r}$ e $L(\bar{s}, P)$ è un piano. Ora $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) = \bar{r} \cap L(\bar{s}, P)$. Quindi, $0 \leq \dim(\bar{r} \cap L(\bar{s}, P)) \leq 1$ e $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) \neq \{P\}$ se e solo se ha dimensione 1, ovvero se e solo se $\bar{r} \cap L(\bar{s}, P) = \bar{r}$. Ma, in tal caso, $\bar{r} \subset L(\bar{s}, P)$ e quindi $\bar{r}$ ed $\bar{s}$ sarebbero complanari. Dunque, nel caso $P \in \bar{r}$, si ha che $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) = \{P\}$. Analogamente se $P \in \bar{s}$. Invece, se $P \notin \bar{r} \cup \bar{s}$, allora $L(\bar{r}, P)$ e $L(\bar{s}, P)$ sono due piani in $\mathbb{P}^3$, dunque si intersecano almeno in una retta, quindi $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) \neq \{P\}$.

Pertanto $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) \neq \{P\}$ se e solo se $P \notin \bar{r} \cup \bar{s}$.

(c) Abbiamo che $\mathbb{P}^3$ è immerso in $\mathbb{P}^4$ come l'iperpiano H di equazione $X_4 = 0$. Dato che $\bar{r}$ e $\bar{s}$ sono sghembe in H , si ha che $L(\bar{r}, \bar{s}) = H$. Se fosse $L(\bar{r}, \bar{s}) = p_k$ avremmo che $p_k = H$. Ma, usando le equazioni di p_k , si vede subito che contiene dei punti con $X_4 \neq 0$, dunque non è possibile che $p_k = H$. Ne concludiamo che non esistono valori di k tali che $L(\bar{r}, \bar{s}) = p_k$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$\frac{2+2k}{3}X^2 + \frac{2(2-k)\sqrt{2}}{3}XY + \frac{4+k}{3}Y^2 + \sqrt{3}X = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h-1)Y^2 + 1 = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi, iperboli o parabole.
- (b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{D}_h$ non ha punti reali e $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Le matrici di $\mathcal{C}_k$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2+2k}{3} & \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} & \frac{4+k}{3} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} \frac{2+2k}{3} & \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} \\ \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} & \frac{4+k}{3} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A_0) = 2k$, pertanto $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse se e solo se $k > 0$, una parabola se e solo se $k = 0$, un'iperbole se e solo se $k < 0$.

Le matrici di $\mathcal{D}_h$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(B_0) = h(h-1)$, pertanto $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse se e solo se $h < 0$ o $h > 1$, una parabola se e solo se $h \in \{0, 1\}$, un'iperbole se e solo se $0 < h < 1$.

(b) Troviamo sia l'equazione canonica euclidea che quella affine (in vista di (c)) di $\mathcal{C}_k$.

Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} \frac{2+2k}{3} - T & \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} \\ \frac{(2-k)\sqrt{2}}{3} & \frac{4+k}{3} - T \end{vmatrix} = (T-2)(T-k)$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e, se $k \neq 2$, $\lambda_2 = k$.

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre distinguere i seguenti casi.

Caso 1: $k = 2$.

L'equazione è $2X^2 + 2Y^2 + \sqrt{3}X = 0$, da cui con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ Y' = Y \end{cases}$$

si trova $2X'^2 + 2Y'^2 - \frac{3}{8} = 0$ e quindi la forma canonica euclidea

$$\frac{X'^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} + \frac{Y'^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} - 1 = 0$$

e l'equazione canonica affine è $X'^2 + Y'^2 - 1 = 0$.

Supponiamo ora $k \neq 2$.

È facile vedere che una base ortonormale di autovettori di A_0 è $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1)\}$, pertanto operiamo con l'isometria

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{3}}(X - \sqrt{2}Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}X + Y) \end{cases}$$

ottenendo

$$2X'^2 + kY'^2 + X' - \sqrt{2}Y' = 0.$$

da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{4} \\ Y' = Y \end{cases}$$

abbiamo

$$(*) \quad 2X^2 + kY^2 - \sqrt{2}Y - \frac{1}{8} = 0.$$

Caso 2: $k = 0$.

Abbiamo, da (*), l'equazione

$$2X^2 - \sqrt{2}Y - \frac{1}{8} = 0$$

da cui, scambiando X ed Y , si ha

$$2Y^2 - \sqrt{2}X - \frac{1}{8} = 0$$

a cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$$

si ottiene l'equazione canonica euclidea

$$Y^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)X = 0$$

e affine $Y^2 - X = 0$.

Supponiamo ora $k \notin \{0, 2\}$.

Da (*), con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y + \frac{1}{k\sqrt{2}} \end{cases}$$

otteniamo

$$(**) \quad 2X^2 + kY^2 - \frac{k+4}{8k} = 0.$$

Caso 3: $k = -4$.

Da (**) abbiamo l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

e affine $X^2 - Y^2 = 0$.

Supponiamo ora $k \notin \{-4, 0, 2\}$ e quindi otteniamo da (**),

$$(***) \quad \frac{16k}{k+4}X^2 + \frac{16k^2}{k+4}Y^2 - 1 = 0.$$

Caso 4: $k < -4$.

Abbiamo da (***) l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{-\frac{k+4}{16k^2}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Caso 5: $-4 < k < 0$.

Abbiamo da (***), scambiando X ed Y , l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k^2}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{-\frac{k+4}{16k}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Caso 6: $k > 0$.

Dato che $\sqrt{\frac{k+4}{16k}} \geq \sqrt{\frac{k+4}{16k^2}}$ se e solo se $k \geq 1$, deduciamo da $(***)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k^2}}\right)^2} = 1 \text{ se } k \geq 1$$

mentre, scambiando X e Y è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k^2}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k+4}{16k}}\right)^2} = 1 \text{ se } 0 < k < 1.$$

In entrambi i casi l'equazione canonica affine è $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.

(c) Dato che $\mathcal{D}_h$ non ha punti reali, la sua equazione canonica affine può essere solo $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ oppure $Y^2 + 1 = 0$. Dato che nessuno dei casi in (b) coincide con uno di questi due, abbiamo che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ non sono affinementemente equivalenti, e quindi neanche congruenti, per nessun valore di k ed h tale che $\mathcal{D}_h$ non ha punti reali. ■