

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2025-2026

Prova scritta del 18-2-2026

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k .

(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k .

Consideriamo ora i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e la struttura corrispondente di spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia T_k un operatore su $\mathbb{R}^3$ tale che $M_E(T_k) = A_k$. Determinare un operatore T' su $\mathbb{R}^3$, e la sua matrice, in modo che $T_k - T'$ è unitario.

(d) Calcolare l'angolo tra E_2 ed E_3 .

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ con coordinate X, Y, Z , consideriamo la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} X - Y = 1 \\ X + Z = 2 \end{cases}$$

e la retta s passante per $Q = Q(1, \sqrt{2}, 0)$ e giacitura $\langle E_3 \rangle$.

(a) Determinare se esiste un'isometria $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tale che $d(f(r), f(s)) = 2$.

Sia ora $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$ e siano $\bar{r}, \bar{s}$ le chiusure proiettive.

(b) Determinare tutti i punti $P \in \mathbb{P}^3$ tali che $L(\bar{r}, P) \cap L(\bar{s}, P) \neq \{P\}$.

(c) Consideriamo ora $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ con coordinate omogenee $X_0, \dots, X_4$ e sia p_k il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^4$ di equazioni

$$p_k : \begin{cases} X_0 - kX_1 = 0 \\ kX_2 + kX_4 = 0 \end{cases}.$$

Determinare per quali i valori di k (se esistono) si ha che $L(\bar{r}, \bar{s}) = p_k$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$\frac{2+2k}{3}X^2 + \frac{2(2-k)\sqrt{2}}{3}XY + \frac{4+k}{3}Y^2 + \sqrt{3}X = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h-1)Y^2 + 1 = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi, iperboli o parabole.
- (b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{D}_h$ non ha punti reali e $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).