

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2025-2026

Prova scritta del 24-6-2026

TESTO

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base. Siano $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 - e_3$ e $U = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_3, e_3) = 1, b(e_2, v_1) = b(e_2, v_2) = 1, e_2 + e_3 \in U^\perp$$

e $b|_U$ ha matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$ nella base $\{v_1, v_2\}$ di U .

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V .

(c) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V . Sia e' la base di V scelta in (a) per calcolare la matrice di b . Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore tale che $M_{e'}(T) = M_{e'}(b)$. Determinare (se esistono) dei valori di k per i quali T è un operatore simmetrico.

(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V . Calcolare il prodotto vettoriale $v_1 \wedge v_2$.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4$ con coordinate $X_0, \dots, X_4$, consideriamo la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_0 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

e il piano p_k di equazione

$$p_k : \begin{cases} kX_1 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare $L(r, p_k)$ e se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ tale che $f(L(r, p_k))$ è l'iperpiano di equazione $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$.

(b) Determinare se esistono punti $P_1, P_2 \in r, P_3, P_4 \in p_k$ tali che P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.

(c) Consideriamo ora il caso in cui $\dim L(r, p_k) = 3$, in modo che $L(r, p_k) = \mathbb{P}^3$. Preso un qualsiasi $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$, calcolare l'angolo tra $r \cap \mathbb{A}^3$ e $p_k \cap \mathbb{A}^3$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 2\sqrt{3}(k-4)XY + (3k-8)Y^2 + X + \sqrt{3}Y = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$\mathcal{D}_h : X^2 + hY^2 + h = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi, iperboli o parabole.
- (b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$.
- (c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ è affinementemente equivalente (nel caso affine reale) o congruente (nel caso euclideo) a $\mathcal{D}_h$.