

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2025-2026

Prova scritta del 28-1-2026

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che, per ogni k fissato, esistono ∞^1 forme bilineari simmetriche $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, con forma quadratica associata $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, tali che:

$$q(e_1) = q(e_2) = q(e_3) = k, b(e_1, e_2 + e_3) = 1, e_1 \perp e_3 \text{ e la segnatura di } b \text{ è } (3, 0) \text{ o } (0, 3).$$

Consideriamo ora su V la forma bilineare $b' = -b$ nei casi di (a) in cui b' definisce un prodotto scalare su V .

(b) Determinare (se esistono) tutti gli operatori unitari $T : V \rightarrow V$ tali che $T(e_2) \perp e_3$ e T ha la stessa matrice di b nella base e .

(c) Determinare (se esistono) tutte le forme b' tali che $\|e_2 \wedge e_3\| = 1$.

SOLUZIONE:

(a) Si ha $b(e_1, e_3) = 0$ e

$$1 = b(e_1, e_2 + e_3) = b(e_1, e_2) + b(e_1, e_3) = b(e_1, e_2).$$

Posto

$$b(e_2, e_3) = a,$$

si ottiene

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & a \\ 0 & a & k \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora i minori principali

$$D_1 = k, D_2 = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1, D_3 = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & a \\ 0 & a & k \end{vmatrix} = k(k^2 - a^2 - 1).$$

Per il criterio dei minori principali, la segnatura di b sarà $(3, 0)$ se e solo se $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$, ovvero se e solo se $k > 0, k^2 - 1 > 0, k(k^2 - a^2 - 1) > 0$, se e solo se

$$k > 1, -\sqrt{k^2 - 1} < a < \sqrt{k^2 - 1}.$$

Mentre, la segnatura di b sarà $(0, 3)$ se e solo se $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$, ovvero se e solo se $k < 0, k^2 - 1 > 0, k(k^2 - a^2 - 1) < 0$, se e solo se

$$k < -1, -\sqrt{k^2 - 1} < a < \sqrt{k^2 - 1}.$$

Si conclude che esistono ∞^1 forme bilineari simmetriche come richiesto se e solo se la loro matrice è

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & a \\ 0 & a & k \end{pmatrix}$$

dove $k < -1$ o $k > 1$ e $-\sqrt{k^2 - 1} < a < \sqrt{k^2 - 1}$.

In particolare, $b' = -b$ definisce un prodotto scalare su V se e solo se la segnatura di b è $(0, 3)$, ovvero se e solo se

$$(*) \quad k < -1, -\sqrt{k^2 - 1} < a < \sqrt{k^2 - 1}.$$

Da ora in poi assumiamo dunque queste condizioni $(*)$.

(b) Abbiamo

$$M_e(T) = M_e(b) = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & a \\ 0 & a & k \end{pmatrix}$$

dunque $T(e_2) = e_1 + ke_2 + ae_3$. Quindi, nel prodotto scalare dato da b' , si ha

$$0 = \langle T(e_2), e_3 \rangle = \langle e_1 + ke_2 + ae_3, e_3 \rangle = b'(e_1 + ke_2 + ae_3, e_3) = -b(e_1 + ke_2 + ae_3, e_3) = -2ak$$

e sappiamo che $k < -1$, quindi $a = 0$. Ma allora $T(e_3) = ke_3$ e pertanto, se T fosse unitario, si avrebbe che

$$\|e_3\| = \|T(e_3)\| = \|ke_3\| = |k|\|e_3\|$$

da cui deduciamo che $|k| = 1$, contraddizione. Pertanto un tale T unitario non esiste.

(c) Se esistesse una forma b' tale che $\|e_2 \wedge e_3\| = 1$ allora, per le proprietà del prodotto vettoriale, si avrebbe che

$$1 = \|e_2 \wedge e_3\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle \langle e_3, e_3 \rangle - \langle e_2, e_3 \rangle^2 = b'(e_2, e_2)b'(e_3, e_3) - b'(e_2, e_3)^2 =$$

$$= b(e_2, e_2)b(e_3, e_3) - b(e_2, e_3)^2 = k^2 - a^2$$

che è esclusa per ipotesi. Dunque una tale forma b' non esiste. ■

2. Sia h un numero reale. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia $Q = Q(1, 3, 0) \in \mathbb{E}$. Sia p_h il piano di $\mathbb{E}$ di equazione $hX + Y - Z = 0$ e sia r_h la retta di $\mathbb{E}$ di equazioni

$$r_h : \begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \\ Z = ht \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte le rette s di $\mathbb{E}$ che soddisfano tutte le seguenti condizioni : $Q \in s$, l'angolo tra s e p_h è $\frac{\pi}{4}$ e la distanza di s da r_h è 1.

(b) Determinare (se esiste) un'isometria $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tale che $f(r_h)$ è ortogonale a p_h e $Q \in f(r_h)$.

(c) Considerato $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ siano $\bar{p}_h$ e $\bar{r}_h$ le chiusure proiettive di p_h ed r_h . Determinare (se esistono) tutte le terne di punti $P_1, P_2 \in \bar{r}_h, P_3 \in \bar{p}_h$ tali che $L(P_1, P_2, P_3)$ è un piano.

SOLUZIONE:

Osserviamo che r_h è la retta passante per $Q' = Q'(2, 3, 0)$ di giacitura $\langle hk \rangle$. Ne segue che $h \neq 0$ e la giacitura di r_h sarà anche $\langle k \rangle$.

(a) Sia ora $v_s = li + mj + nk$ un versore di direzione di s in cui $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. L'angolo tra s e p_h è $\frac{\pi}{4}$ se e solo se

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\langle n_{p_h}, v_s \rangle}{\|n_{p_h}\| \|v_s\|} = \frac{hl + m - n}{\sqrt{h^2 + 2}}$$

Usando i punti Q e Q' , abbiamo che

$$1 = d(s, r_h) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{m^2 + l^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + l^2}}$$

dalla quale deduciamo che $|m| = \sqrt{m^2 + l^2}$, ovvero che $m^2 = m^2 + l^2$ e quindi $l = 0$.

Sostituendo in (*), abbiamo che

$$n = m - \sqrt{\frac{h^2 + 2}{2}}.$$

Sostituendo in $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ deduciamo che

$$2m^2 - 2\sqrt{\frac{h^2 + 2}{2}}m + \frac{h^2}{2} = 0$$

da cui, tutte le rette s richieste sono quelle passanti per Q e con giacitura $\langle mj + nk \rangle$, dove

$$m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{h^2 + 2}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - h^2}{2}} \right), n = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{h^2 + 2}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - h^2}{2}} \right).$$

(b) Sia $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un'isometria con operatore unitario associato φ . Dato che $r_h = S_{Q', \langle k \rangle}$, si avrà che

$$f(r_h) = S_{f(Q'), \langle \varphi(k) \rangle}$$

è ortogonale a p_h se e solo se $\varphi(k)$ è ortogonale a p_h . Essendo φ unitario abbiamo necessariamente che

$$\varphi(k) = n_{p_h} = \pm \frac{1}{\sqrt{h^2 + 2}}(hi + j - k).$$

Sia ora $\{f_1 = n_{p_h}, f_2, f_3\}$ una base ortonormale che contiene n_{p_h} (ottenuta, per esempio da Gram-Schmidt) e sia $\varphi : V \rightarrow V$ l'operatore unitario tale che

$$\varphi(k) = n_{p_h}, \varphi(i) = f_2, \varphi(j) = f_3.$$

Per ottenere $Q \in f(r_h)$, poniamo per esempio $f(Q') = Q$. Per determinare f resta da trovare $f(O)$. Ora sia $f(O) = O' = O'(a, b, c)$. Si ha

$$\overrightarrow{f(O)f(Q')} = \varphi(\overrightarrow{OQ'}) = \varphi(2i + 3j) = 2f_2 + 3f_3.$$

Del resto $\overrightarrow{f(O)f(Q')} = \overrightarrow{f(O)Q} = (1 - a)i + (3 - b)j - ck$. Dato che $\{O, i, j, k\}$ è una base, esisteranno (a, b, c) tali che $(1 - a)i + (3 - b)j - ck = 2f_2 + 3f_3$ e questo determina $f(O)$. Ne deduciamo che esiste sempre un'isometria f tale che $f(r_h)$ è ortogonale a p_h e $Q \in f(r_h)$.

(c) Abbiamo che

$$\overline{p_h} : hX_1 + X_2 - X_3 = 0, \quad \overline{r_h} : \begin{cases} -2X_0 + X_1 = 0 \\ -3X_0 + X_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\overline{p_h} \cap \overline{r_h} \begin{cases} hX_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ -2X_0 + X_1 = 0 \\ -3X_0 + X_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $X_1 = 2X_0, X_2 = 3X_0, X_3 = (2h + 3)X_0$. Pertanto $\overline{p_h} \cap \overline{r_h}$ è il punto $P = P[1, 2, 3, 2h + 3]$. Ora, una terna di punti $P_1, P_2 \in \overline{r_h}, P_3 \in \overline{p_h}$ sarà tale che $L(P_1, P_2, P_3)$ è un piano se e solo se $P_1, P_2 \in \overline{r_h}, P_1 \neq P_2, P_3 \in \overline{p_h} \setminus \{P\}$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$\frac{k - 3}{5}X^2 - \frac{4(k + 2)}{5}XY + \frac{4k + 3}{5}Y^2 + k = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - (h+1)Y^2 - 1 = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
- (b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Supponiamo che $P = P[0, 1, 2] \in \mathbb{P}^2$ sia un punto all'infinito di $\mathcal{D}_h$. Determinare i valori k per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Le matrici di $\mathcal{C}_k$ sono

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k-3}{5} & -\frac{2(k+2)}{5} \\ 0 & -\frac{2(k+2)}{5} & \frac{4k+3}{5} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} \frac{k-3}{5} & -\frac{2(k+2)}{5} \\ -\frac{2(k+2)}{5} & \frac{4k+3}{5} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A) = -k(k+1)$, $\det(A_0) = -k-1$, pertanto $\mathcal{C}_k$ è non degenera se e solo se $k \notin \{-1, 0\}$ ed è semplicemente degenera se e solo se $k \in \{-1, 0\}$. Inoltre $\mathcal{C}_k$ è a centro se e solo se $k \neq -1$.

Le matrici di $\mathcal{D}_h$ sono

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h-1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h-1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(B) = h(h+1)$, $\det(B_0) = -h(h+1)$, pertanto $\mathcal{D}_h$ è non degenera e a centro se e solo se $h \notin \{-1, 0\}$ ed è semplicemente degenera se e solo se $h \in \{-1, 0\}$.

(b) Troviamo sia l'equazione canonica euclidea che quella affine (in vista di (c)) di $\mathcal{C}_k$.

Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} \frac{k-3}{5} - T & -\frac{2(k+2)}{5} \\ -\frac{2(k+2)}{5} & \frac{4k+3}{5} - T \end{vmatrix} = (T+1)(T-k-1)$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e, se $k \neq -2$, $\lambda_2 = k+1$.

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre distinguere i seguenti casi.

Caso 1: $k = -2$.

L'equazione è $-X^2 - Y^2 - 2 = 0$, da cui si trova la forma canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = -1$$

e l'equazione canonica affine è $X^2 + Y^2 + 1 = 0$.

Supponiamo ora $k \neq -2$.

È facile vedere che una base ortonormale di autovettori di A_0 è $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\}$, pertanto operiamo con l'isometria

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}$$

ottenendo

$$-X^2 + (k+1)Y^2 + k = 0$$

ovvero

$$(*) \quad X^2 - (k+1)Y^2 - k = 0.$$

Caso 2: $k = 0$.

Abbiamo da (*), l'equazione canonica euclidea e affine $X^2 - Y^2 = 0$.

Caso 3: $k = -1$.

Da (*) abbiamo, scambiando X e Y , l'equazione canonica euclidea e affine $Y^2 + 1 = 0$.

Supponiamo ora $k \notin \{-2, -1, 0\}$ e quindi otteniamo da (*),

$$(**) \quad \frac{X^2}{k} - \frac{k+1}{k}Y^2 - 1 = 0.$$

Caso 4: $k > 0$.

Da (**) abbiamo l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Caso 5: $-1 < k < 0$.

Deduciamo da (**), scambiando X e Y , che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{-\frac{k}{k+1}}\right)^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Caso 6: $k < -1$.

Dato che $\sqrt{-k} \geq \sqrt{\frac{k}{k+1}}$ se e solo se $k \leq -2$, deduciamo da (**) che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{(\sqrt{-k})^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)^2} = -1 \text{ se } k \leq -2$$

mentre, scambiando X e Y è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{-k})^2} = -1 \text{ se } -2 < k < -1.$$

In entrambi i casi l'equazione canonica affine è $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.

(c) L'equazione di $\overline{\mathcal{D}}_h$ è $-X_0^2 + hX_1^2 - (h+1)X_2^2 = 0$, dunque $P = P[0, 1, 2]$ è un punto all'infinito di $\mathcal{D}_h$ se solo se $h - 4(h+1) = 0$, ovvero se e solo se $h = -\frac{4}{3}$. In particolare, l'equazione canonica di $\mathcal{D}_{-\frac{4}{3}}$ è

$$\frac{X^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Ne deduciamo da (b) che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_{-\frac{4}{3}}$ sono affinementemente equivalenti se e solo se $k > 0$ oppure $-1 < k < 0$.

Infine $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_{-\frac{4}{3}}$ sono congruenti se e solo se $k > 0$ e $\sqrt{k} = \sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{k}{k+1}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ oppure $-1 < k < 0$ e $\sqrt{-\frac{k}{k+1}} = \sqrt{3}$, $\sqrt{-k} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, ovvero se e solo se $k \in \{3, -\frac{3}{4}\}$. ■