

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2025-2026

Prova scritta del 28-1-2026

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che, per ogni k fissato, esistono ∞^1 forme bilineari simmetriche $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, con forma quadratica associata $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, tali che:

$$q(e_1) = q(e_2) = q(e_3) = k, b(e_1, e_2 + e_3) = 1, e_1 \perp e_3 \text{ e la segnatura di } b \text{ è } (3, 0) \text{ o } (0, 3).$$

Consideriamo ora su V la forma bilineare $b' = -b$ nei casi di (a) in cui b' definisce un prodotto scalare su V .

(b) Determinare (se esistono) tutti gli operatori unitari $T : V \rightarrow V$ tali che $T(e_2) \perp e_3$ e T ha la stessa matrice di b nella base e .

(c) Determinare (se esistono) tutte le forme b' tali che $\|e_2 \wedge e_3\| = 1$.

2. Sia h un numero reale. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia $Q = Q(1, 3, 0) \in \mathbb{E}$. Sia p_h il piano di $\mathbb{E}$ di equazione $hX + Y - Z = 0$ e sia r_h la retta di $\mathbb{E}$ di equazioni

$$r_h : \begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \\ Z = ht \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte le rette s di $\mathbb{E}$ che soddisfano tutte le seguenti condizioni : $Q \in s$, l'angolo tra s e p_h è $\frac{\pi}{4}$ e la distanza di s da r_h è 1.

(b) Determinare (se esiste) un'isometria $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tale che $f(r_h)$ è ortogonale a p_h e $Q \in f(r_h)$.

(c) Considerato $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ siano $\bar{p}_h$ e $\bar{r}_h$ le chiusure proiettive di p_h ed r_h . Determinare (se esistono) tutte le terne di punti $P_1, P_2 \in \bar{r}_h, P_3 \in \bar{p}_h$ tali che $L(P_1, P_2, P_3)$ è un piano.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$\frac{k-3}{5}X^2 - \frac{4(k+2)}{5}XY + \frac{4k+3}{5}Y^2 + k = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - (h+1)Y^2 - 1 = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
- (b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Supponiamo che $P = P[0, 1, 2] \in \mathbb{P}^2$ sia un punto all'infinito di $\mathcal{D}_h$. Determinare i valori k per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).