Tutorato 11 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

18 dicembre 2025

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$. La matrice A' associata a tale equazione è

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta $(x, y, 1) \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ Analogamente la matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta $(x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2h^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k = 0$

con Per stabilire se si tratta di una conica degenere o non degenere determiniamo il rango di A' cominciando a calcolare il determinante di A': $I_3 = \det(A') = -540 + 40 = -500 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A') = 3$ Quindi si tratta di una conica non degenere.

Per stabilire se si tratta di un'ellisse, di una parabola o di una iperbole calcoliamo il determinante di A: $I_2 = \det(A) = 54 - 4 = 50 > 0$ Quindi si tratta di un ellisse.

Poiché si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h$ ovvero il sistema associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}II, I \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow II - 9I \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y.

b) Consideriamo l'equazione $x^2+6xy+y^2+2x+y+\frac{1}{2}=0$ e le matrici A' e A associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione della conica risulta $(x,y,1)\cdot A' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ovvero $(x,y)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2h^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k = 0$ con Inoltre $I_3 = \det(A') = \frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere $I_2 = \det(A) = 1 - 9 = -8 < 0 \Rightarrow$ iperbole.

Poiché si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h$ ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow 2II \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow II{-}6I \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2+6xy-2y^2+2x-4y+2=0$ e le matrici A e A' associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k = 2$$

Si ha $I_3 = \det(A') = -8 - 24 - 4 = -36 \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = -2 - 9 = -11 < 0 \Rightarrow$ iperbole. Determiniamo il centro risolvendo il sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h$ ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow II{-}3I \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -11 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{11} \\ y = -\frac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ -\frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

d) Consideriamo l'equazione $x^2+2xy+y^2+3x+3y=0$ e le matrici A' e A associate

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad k = 0$$

Poiché A' ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$ e $\text{rank}(A') < 3$. Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio: $\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A') = 2 \Rightarrow$ conica semplic. degenere. Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come un'equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro: $x^2+(2y+3)x+(y^2+3y) = 0$ Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo Si tratta quindi di due rette reali parallele: $r_1 : x + y = 0,\ r_2 : x + y + 3 = 0$

e) Consideriamo l'equazione $2x^2+2xy+3y^2+1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1$$

Si ha $I_3 = \det(A') = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A') = 3 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = 5 > 0 \Rightarrow$ ellisse. Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$C = (0, 0)$ f) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 38$$

Si ha $I_3 = \det(A') = -32 \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = 25 - 9 = 16 > 0 \Rightarrow$ ellisse. Poiché si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow II, 5II{+}3I \begin{pmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$
$C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ g) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad k = 7$$

Si ha $I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = -175 < 0 \Rightarrow$ iperbole. Poiché si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

h) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto A' ha due righe uguali. Inoltre riducendo la matrice a gradini otteniamo:

$$II + 3I,\ III - I \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi rank(A') = 1 e si tratta di una conica doppiamente degenere, ovvero di due rette coincidenti.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa): $x^2 - 2(3y - 1) + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = (3y - 1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1$ Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$.

i) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = -2$$

Si ha $I_3 = \det(A') = -1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = -1 < 0 \Rightarrow$ iperbole. Poiché si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

l) Consideriamo l'equazione $x^2+4xy+4y^2-6x+1=0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1$$

Si ha $I_3 = \det(A') = -36 \neq 0 \Rightarrow$ conica non degenere. $I_2 = \det(A) = 0 \Rightarrow$ parabola. m) Consideriamo l'equazione $x^2+xy-2y^2+3y-1=0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Si ha $I_3 = \det(A') = 0 \Rightarrow$ conica degenere. Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio: $\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = -2 - \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A') = 2 \Rightarrow$ conica sempl. degenere. Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come un'equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa): $x^2+xy+(-2y^2+3y-1)=0$ Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo : Si tratta quindi di due rette reali incidenti: $r_1: x-y+1=0$, $r_2: x+2y-1=0$ Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo quindi anche ricavare, come nei casi precedenti, risolvendo il sistema $A \cdot (x\ y)^T = -h$.

Esercizio 2 Consideriamo le matrici associate a C_k:

$$A' = \begin{pmatrix} 2k & k-2 & 1 \\ k-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2k & k-2 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = k^2 + 4k + 8 \neq 0$ per ogni valore di k, quindi **non esistono coniche degeneri** nella famiglia.

b) $I_2 = \det(A) = -(k+2)^2$, quindi:

- Se $k = -2$, $I_2 = \det(A) = 0$ e C_{-2} è una **parabola**.
- Se $k \neq -2$, $I_2 = \det(A) < 0$ e C_k è un'**iperbole**.

c) Calcoliamo il centro C_k delle coniche C_k nel caso $k \neq -2$: Il sistema da risolvere è $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -h$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 2k & k-2 & | & -1 \\ k-2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4II+(k-2)I \begin{pmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & | & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{(k+2)^2} \\ y = -\frac{k-2}{(k+2)^2} \end{cases}$$

Le coordinate del centro sono quindi $C_k \left(-\frac{4}{(k+2)^2}, -\frac{k-2}{(k+2)^2} \right)$.

Esercizio 3 Abbiamo:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} & 0 \\ \frac{k-2}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere: $\det(A') = -4 \left[1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 \right]$. $\det(A') = 0$ se $\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = 1$, cioè $\frac{k-2}{2} = 1 \Rightarrow k_1 = 4$ o $\frac{k-2}{2} = -1 \Rightarrow k_2 = 0$. La conica è non degenere se $k \neq 4$ e $k \neq 0$. Inoltre: $\det(A) = 1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4k}{4}$. Quindi:

- Se $0 < k < 4$, si ha $\det(A) > 0$ e C è un'**ellisse**.
- Se $k < 0$ o $k > 4$, si ha $\det(A) < 0$ e C è un'**iperbole**.
- Se $k = 0$ o $k = 4$, si tratta di una **parabola degenere**.

b) La conica è degenere se $k = 0$ o $k = 4$.

- Se $k = 0$, otteniamo due rette parallele: $r_1 : x - y = 2$, $r_2 : x - y = -2$.
- Se $k = 4$, otteniamo due rette parallele: $r_1 : x + y = 2$, $r_2 : x + y = -2$.

c) Gli assi di simmetria per $k \neq 0, 4, 2$ sono le rette: $a_1 : x + y = 0$ e $a_2 : x - y = 0$. Queste rette sono assi di simmetria anche nei casi degeneri e per $k = 2$ (circonferenza).

Esercizio 4 Considerando le matrici associate:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = -4\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right]$. $\det(A') = 0$ se $k = \pm 2$. La conica è non degenere se $k \neq \pm 2$. $I_2 = \det(A) = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4}{4}$. Quindi:

- Se $-2 < k < 2$, si ha $I_2 > 0$ e C è un'**ellisse**.
- Se $k < -2$ o $k > 2$, si ha $I_2 < 0$ e C è un'**iperbole**.
- Se $k = \pm 2$, si tratta di una **parabola degenere**.

b) La conica è degenere se $k = \pm 2$. Si ottengono coppie di rette parallele:

- Se $k = -2$, $r_1 : x - y = 2$, $r_2 : x - y = -2$.
- Se $k = 2$, $r_1 : x + y = 2$, $r_2 : x + y = -2$.

c) Tutte le ellissi sono reali perché contengono punti reali come $A(0, 2)$ e $B(0, -2)$ per ogni k.

Esercizio 5 La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{pmatrix} 2t-1 & 3t & 1 \\ 3t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è **degenere per $t = 0$**.
b) $\det(A) = -7t^2 - t$. Quindi:

- Se $t < -\frac{1}{7}$ o $t > 0$, $\det(A) < 0$, si tratta di un'**iperbole**.
- Se $-\frac{1}{7} < t < 0$, $\det(A) > 0$, si tratta di un'**ellisse**.
- Se $t = -\frac{1}{7}$, $\det(A) = 0$, si tratta di una **parabola**.
- Se $t = 0$, si hanno due rette parallele: $x = 0$ e $x = 2$.

c) Per $t = \frac{1}{3}$, la forma canonica dell'iperbole è $C_{1/3} : \frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 - \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$.

—

Esercizio 6 La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è **degenere per $t = 0$**.
b) $\det(A) = t^2 + 2t - 1$. Quindi:

- Se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$, $\det(A) > 0$, si tratta di un'**ellisse**.
- Se $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ con $t \neq 0$, $\det(A) < 0$, si tratta di un'**iperbole**.
- Se $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\det(A) = 0$, si tratta di una **parabola**.
- Se $t = 0$, si hanno due rette incidenti: $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.

c) Per $t = -1$, la forma canonica dell'iperbole è $C_{-1} : 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - 1 = 0$.

Esercizio 7 I punti $P_1[0, 1, 0]$ e $P_2[0, 0, 1]$ appartengono alla conica $2X_0^2 - 4X_0X_2 = 0$ perché nell'equazione non compaiono i termini in X_1^2 e X_2^2 rispettivamente.

- Il punto P_1 è un **punto doppio**, poiché nell'equazione non compaiono termini in X_1.
- Il punto P_2 è un **punto semplice**, poiché nell'equazione compare un termine in X_2 (nello specifico, il termine misto $-4X_0X_2$).

Esercizio 8 a) La matrice della conica è $A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 5 \\ -10 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché il rango di A è 1, l'equazione canonica proiettiva è:

$$Y_0^2 = 0$$

b) La conica è una retta doppia di equazione $5X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$. Un possibile cambio di coordinate è dato da:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} Y$$

Esercizio 9 a) La matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango è 2, quindi l'equazione canonica proiettiva è:

$$Y_0^2 + Y_1^2 = 0$$

b) La conica ha un unico punto doppio $Q[3, -2, -3]$. Un possibile cambio di coordinate che porta alla forma canonica è:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/2 & -i/2 & -2 \\ 1/2 & i/2 & -3 \end{pmatrix} Y$$

Esercizio 10 a) La matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il rango è 3, pertanto l'equazione canonica proiettiva è:

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$$

b) Un triangolo autopolare è formato dalle rette $s : 4X_0 - X_2 = 0$, $t : X_1 + X_2 = 0$ e $u : X_2 = 0$. **c)** Un possibile cambio di coordinate $X = MY$ è:

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 1 & -4/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 0 & 4/(i\sqrt{32}) \end{pmatrix}$$

Esercizio 11 a) L'intersezione con la retta $r : X_0 = 2X_1 + 2X_2$ produce i punti complessi coniugati:

$$[-4 + 4i, 1, -3 + 2i], \quad [-4 - 4i, 1, -3 - 2i]$$

L'intersezione con $s : X_0 = -X_1 - X_2$ produce i punti:

$$[0, 1, 1], \quad [2/3, 1, -1/3]$$

b) Le rette tangenti nel fascio generato da r e s si ottengono per $t = -2$, corrispondente alla retta:

$$X_0 = 0$$

Esercizio 12 a) La conica ha rango 2 ed è composta da due rette reali distinte ($X_1 = 0$ e $X_0 + X_2 = 0$), dunque la forma canonica proiettiva reale è:

$$Y_0^2 - Y_1^2 = 0$$

b) Un cambio di coordinate reale $X = MY$ è dato dalla matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13 Per determinare il completamento proiettivo della conica $2x^2-3y^2+5x-2y+3 = 0$, si sostituisce $x = X_1/X_0$ e $y = X_2/X_0$. L'equazione omogenea è:

$$2X_1^2 - 3X_2^2 + 5X_1X_0 - 2X_2X_0 + 3X_0^2 = 0$$

Esercizio 14 Un punto proprio ha coordinate omogenee della forma $[1, x, y]$, ove (x, y) siano le corrispondenti coordinate affini. I punti propri di Γ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione (nelle variabili (x, y)) ottenuta dall'equazione di Γ sostituendo X_1 con x, X_2 con y e valutando X_0 in 1. L'equazione del luogo cercato è dunque $2x^2 + 1 + 2xy + 2x + 4y = 0$: il luogo dei punti propri di Γ è una conica affine e Γ è una conica propria.