

# Tutorato 11 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

18 dicembre 2025

**Esercizio 1** Determinare il tipo di conica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una conica a centro, calcolare le coordinate del centro della conica.

1.  $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$
2.  $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$
3.  $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$
4.  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$
5.  $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$
6.  $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
7.  $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
8.  $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$
9.  $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$
10.  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$
11.  $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

**Esercizio 2** Sia  $k$  un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche  $C_k$  di equazione

$$C_k : 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

- a) Esistono coniche degeneri nella famiglia?
- b) Si classifichi la conica  $C_k$  al variare di  $k$ .
- c) Si determinino le coordinate dei centri delle coniche  $C_k$  (quando esistono).

- Esercizio 3** Sia  $C_k$  la conica di equazione  $C_k : x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0$
- Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , riconoscere di quale tipo di conica si tratta.
  - Trovare le coniche degeneri della famiglia.
  - Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.

- Esercizio 4** Sia  $C_k$  la conica di equazione  $C_k : x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0$
- Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , riconoscere di quale tipo di conica si tratta.
  - Trovare le coniche degeneri della famiglia.
  - Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.

**Esercizio 5** Fissato il parametro reale  $t$ , sia  $C_t$  la conica di equazione

$$C_t : (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

- Stabilire se esistono valori di  $t$  per cui la conica è degenera.
- Determinare il tipo di conica al variare del parametro  $t$ .
- Scrivere la forma canonica di  $C_t$  per  $t = \frac{1}{3}$ .

**Esercizio 6** Fissato il parametro reale  $t$ , sia  $C_t$  la conica di equazione

$$C_t : tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

- Stabilire se esistono valori di  $t$  per cui la conica è degenera.
- Determinare il tipo di conica al variare del parametro  $t$ .
- Scrivere la forma canonica di  $C_t$  per  $t = -1$ .

**Esercizio 7** Determinare la matrice e il rango delle coniche rappresentate da una delle seguenti equazioni:

- $2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1x_3 + 3x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$
- $9x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 18x_1x_3 + 12x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$
- $3x_1^2 - x_2^2 = 0$
- $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 = 0$

**Esercizio 8** Al variare del parametro reale  $t$ , determinare il rango della conica di equazione:

$$tx_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2tx_1x_3 + x_3^2 = 0$$

**Esercizio 9** Si consideri la conica  $\Gamma$  di equazione

$$2X_3X_1 + 4X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

- i) Determinare il rango di  $\Gamma$  e i suoi punti doppi.
- ii) Osservare che i punti  $P_1[1, 0, 0]$  e  $P_2[0, 0, 1]$  sono semplici per  $\Gamma$  e determinare la rispettiva retta tangente a  $\Gamma$ .
- iii) Dire se  $\Gamma$  è riducibile.

**Esercizio 10** Determinare l'equazione della conica costituita dalla retta per i punti  $[2, 1, 1]$  e  $[-1, 2, 2]$  contata con molteplicità 2.

**Esercizio 11** Dire se le seguenti coniche sono parabole o coniche a centro; in quest'ultimo caso, determinare esplicitamente il centro.

i)  $x^2 + 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$

ii)  $x^2 + 2xy - 3x + 2y + 1 = 0$

**Esercizio 12** Determinare gli assi di simmetria e il centro della conica  $Q$  di equazione:

$$2x^2 + 4y^2 - x + 2y = 0$$

Determinare inoltre il cambio di coordinate che muta l'equazione di  $Q$  nella sua forma canonica metrica.

**Esercizio 13** Determinare l'equazione omogenea del completamento proiettivo  $\Gamma$  della conica affine di equazione:  $2x^2 - 3y^2 + 5x - 2y + 3 = 0$ .

**Esercizio 14** Determinare l'equazione affine del luogo dei punti propri della conica proiettiva  $\Gamma$  di equazione omogenea:  $2X_1^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_0 + 4X_2X_0 = 0$ .