

Tutorato 11 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

18 dicembre 2025

Esercizio 1 Determinare il tipo di conica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una conica a centro, calcolare le coordinate del centro della conica.

1. $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$
2. $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$
3. $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$
4. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$
5. $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$
6. $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
7. $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
8. $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$
9. $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$
10. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$
11. $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 2 Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche C_k di equazione

$$C_k : 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

- a) Esistono coniche degeneri nella famiglia?
- b) Si classifichi la conica C_k al variare di k .
- c) Si determinino le coordinate dei centri delle coniche C_k (quando esistono).

Esercizio 3 Sia C_k la conica di equazione $C_k : x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0$

- a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratta.
- b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
- c) Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.

Esercizio 4 Sia C_k la conica di equazione $C_k : x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratta.

- b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
- c) Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.

Esercizio 5 Fissato il parametro reale t , sia C_t la conica di equazione

$$C_t : (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

- a) Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.
- b) Determinare il tipo di conica al variare del parametro t .
- c) Scrivere la forma canonica di C_t per $t = \frac{1}{3}$.

Esercizio 6 Fissato il parametro reale t , sia C_t la conica di equazione

$$C_t : tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

- a) Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.
- b) Determinare il tipo di conica al variare del parametro t .
- c) Scrivere la forma canonica di C_t per $t = -1$.

Esercizio 7 Determinare la matrice e il rango delle coniche rappresentate da una delle seguenti equazioni:

- a) $2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1x_3 + 3x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$
- b) $9x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 18x_1x_3 + 12x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$
- c) $3x_1^2 - x_2^2 = 0$
- d) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 = 0$

Esercizio 8 Al variare del parametro reale t , determinare il rango della conica di equazione:

$$tx_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2tx_1x_3 + x_3^2 = 0$$

Esercizio 9 Si consideri la conica Γ di equazione

$$2X_3X_1 + 4X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

- i) Determinare il rango di Γ e i suoi punti doppi.
- ii) Osservare che i punti $P_1[1, 0, 0]$ e $P_2[0, 0, 1]$ sono semplici per Γ e determinare la rispettiva retta tangente a Γ .
- iii) Dire se Γ è riducibile.

Esercizio 10 Determinare l'equazione della conica costituita dalla retta per i punti $[2, 1, 1]$ e $[-1, 2, 2]$ contata con molteplicità 2.

Esercizio 11 Dire se le seguenti coniche sono parabole o coniche a centro; in quest'ultimo caso, determinare esplicitamente il centro.

i) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$

ii) $x^2 + 2xy - 3x + 2y + 1 = 0$

Esercizio 12 Determinare gli assi di simmetria e il centro della conica Q di equazione:

$$2x^2 + 4y^2 - x + 2y = 0$$

Determinare inoltre il cambio di coordinate che muta l'equazione di Q nella sua forma canonica metrica.

Esercizio 13 Determinare l'equazione omogenea del completamento proiettivo Γ della conica affine di equazione: $2x^2 - 3y^2 + 5x - 2y + 3 = 0$.

Esercizio 14 Determinare l'equazione affine del luogo dei punti propri della conica proiettiva Γ di equazione omogenea: $2X_1^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_0 + 4X_2X_0 = 0$.