Tutorato 1 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

2 ottobre 2025

Esercizio 1 Inanzi tutto vediamo che date due matrici M e M' dimensionalmente uguali abbiamo che $\text{tr}(M + M') = \text{tr}(M) + \text{tr}(M')$ e che $\text{tr}(\lambda M) = \lambda \text{tr}(M) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Per controllare se sono forme bilineari bisogna controllare le proprietà di linearità rispetto alla prima e alla seconda componente.

1. $\varphi(x, y) = \text{tr}((xy^\top)B)$ con $B \in M_n(\mathbb{R})$

Si

$$(a) \quad \varphi(x+x', y) = \text{tr}(((x+x')y^\top)B) = \text{tr}((xy^\top B + x'y^\top B)) = \text{tr}((xy^\top B) + \text{tr}(x'y^\top B)) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

$$(b) \quad \varphi(x, y+y') = \text{tr}(x(y+y')^\top B) = \text{tr}(xy^\top B + xy'^\top B) = \text{tr}(xy^\top B) + \text{tr}(xy'^\top B) = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

$$(c) \quad \varphi(\lambda x, y) = \text{tr}((\lambda xy^\top)B) = \text{tr}(x\lambda y^\top B) = \varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$$

2. $\varphi(x, y) = \frac{x^\top y}{\|x\| \|y\|}$ dove $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ è la norma euclidea.

No infatti sia $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ed $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ $\varphi(e_1 + e_2, e_1) = \frac{(e_1 + e_2)^\top e_1}{\|e_1 + e_2\| \|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_2, e_1) = \frac{e_1^\top e_1}{\|e_1\| \|e_1\|} + \frac{e_2^\top e_1}{\|e_2\| \|e_1\|} = 1$

3. $\varphi(x, y) = \det([x, y, z])$, $z \in \mathbb{R}^3$

Si poiché il determinante è multilineare rispetto alle colonne, risulta immediatamente che per ogni $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ vale:

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \det([x_1 + x_2, y, z]) = \det([x_1, y, z]) + \det([x_2, y, z]) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y),$$

$$\varphi(\lambda x, y) = \det([\lambda x, y, z]) = \lambda \det([x, y, z]) = \lambda \varphi(x, y),$$

e analogamente la linearità vale nel secondo argomento

4. $\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j |y_j|$ No infatti in $\mathbb{R}^n$, poniamo

$$x = (1, 1, 1, \dots, 1), \quad y_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad y_2 = (-1, 0, 0, \dots, 0).$$

Si ha

$$\varphi(x, y_1) = 1, \quad \varphi(x, y_2) = 1,$$

quindi

$$\varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2) = 2.$$

Ma

$$y_1 + y_2 = (0, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \varphi(x, y_1 + y_2) = 0.$$

Pertanto

$$\varphi(x, y_1 + y_2) \neq \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2),$$

cioè φ non è lineare in y .

5.
$$\varphi(x, y) = \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|$$

No non è una forma bilineare perché il valore assoluto distrugge la linearità. Infatti, per $x = e_1$, $y_1 = e_1$, $y_2 = -e_1$ si ha

$$\varphi(x, y_1) = 1, \quad \varphi(x, y_2) = 1, \quad \varphi(x, y_1 + y_2) = 0,$$

quindi $\varphi(x, y_1 + y_2) \neq \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$.

6.
$$\varphi(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$$

Si è bilineare perché ogni somma è lineare. Infatti, per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, y) &= \left(\sum_{j=1}^n (x_1)_j + (x_2)_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) = \left(\sum_{j=1}^n (x_1)_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) + \\ &\left(\sum_{j=1}^n (x_2)_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) \end{aligned}$$

e

$$\varphi(\lambda x, y) = \left(\sum_{j=1}^n \lambda x_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) = \lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) = \lambda \varphi(x, y),$$

e analogamente nel secondo argomento. Quindi φ è bilineare.

7.
$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_j^2$$

Si in quanto

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_j^2 = \sum_{j=1}^n (2x_j y_j) = 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Quindi, $\varphi(x, y)$ è una forma bilineare, essendo un multiplo della forma scalare standard:

$$\varphi(x, y) = 2 x^\top y.$$

Esercizio 2 Ognuna di queste matrici rappresenta una forma bilineare in una data base B , scrivere la forma bilineare nella base canonica

$$1. B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} M(\varphi)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Le colonne di B rappresentano i vettori nella base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.
La matrice di cambiamento di base P da B a E è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

attraverso il processo di gauss jordan o del metodo dei cofattori vediamo che

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice della forma bilineare nella base canonica si ottiene con

$$M_E = (P^{-1})^\top M_B (P^{-1})$$

Esplicitamente:

$$M_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il risultato finale M_E rappresenta la forma bilineare φ nella base canonica.

2. Sia data la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e la matrice della forma bilineare φ nella base B :

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 17 & 11 & 18 \\ 9 & 6 & 11 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di B rappresentano i vettori nella base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.
La matrice di cambiamento di base P da B a E è

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attraverso il processo di Gauss-Jordan o il metodo dei cofattori, si trova

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice della forma bilineare nella base canonica si ottiene con

$$M_E = (P^{-1})^\top M_B P^{-1}.$$

Esplicitamente:

$$M_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 11 & 18 \\ 9 & 6 & 11 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il risultato finale M_E rappresenta la forma bilineare φ nella base canonica.

3. Sia data la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e la matrice della forma bilineare φ nella base B :

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 45 & 51 & -3 \\ 63 & 69 & -3 \\ -9 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di B rappresentano i vettori nella base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.
La matrice di cambiamento di base da B a E è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attraverso il processo di Gauss-Jordan o dei cofattori si trova

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice della forma bilineare nella base canonica si ottiene con

$$M_E = (P^{-1})^\top M_B P^{-1}.$$

Esplicitamente:

$$M_E = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 & 51 & -3 \\ 63 & 69 & -3 \\ -9 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Questa matrice M_E rappresenta la forma bilineare φ nella base canonica

Esercizio 3

(i) Sia data la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 12x^2 + 5xy + 4y^2 + 7z^2.$$

La forma bilineare polare $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)).$$

Sia $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} q(u+v) &= 12(x_1+x_2)^2 + 5(x_1+x_2)(y_1+y_2) + 4(y_1+y_2)^2 + 7(z_1+z_2)^2 \\ &= 12(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 5(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) \\ &\quad + 4(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) + 7(z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2) \\ &= 12x_1^2 + 12x_2^2 + 24x_1x_2 + 5x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 5x_2y_2 \\ &\quad + 4y_1^2 + 4y_2^2 + 8y_1y_2 + 7z_1^2 + 7z_2^2 + 14z_1z_2 \end{aligned}$$

Quindi

$$q(u+v) - q(u) - q(v) = 24x_1x_2 + 5(x_1y_2 + x_2y_1) + 8y_1y_2 + 14z_1z_2.$$

Dividendo per 2, otteniamo la forma bilineare polare:

$$\varphi(u, v) = 12x_1x_2 + \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + 4y_1y_2 + 7z_1z_2.$$

(ii) Sia data la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 4x^2 + 8xy + 2y^2.$$

$$\begin{aligned} q(u + v) &= 4(x_1 + x_2)^2 + 8(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2(y_1 + y_2)^2 \\ &= 4(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 8(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) \\ &\quad + 2(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) \\ &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2 + 8x_1y_1 + 8x_1y_2 + 8x_2y_1 + 8x_2y_2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_1y_2. \end{aligned}$$

Quindi

$$q(u + v) - q(u) - q(v) = 8x_1x_2 + 8(x_1y_2 + x_2y_1) + 4y_1y_2.$$

Dividendo per 2, otteniamo la forma bilineare polare:

$$\varphi(u, v) = 4x_1x_2 + 4(x_1y_2 + x_2y_1) + 2y_1y_2.$$

(iii) Sia data la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 - 4xz + 2y^2 + 3z^2.$$

$$\begin{aligned} q(u + v) &= (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 + x_2)(z_1 + z_2) + 2(y_1 + y_2)^2 + 3(z_1 + z_2)^2 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 4(x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2) \\ &\quad + 2(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) + 3(z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1z_1 - 4x_1z_2 - 4x_2z_1 - 4x_2z_2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_1y_2 + 3z_1^2 + 3z_2^2 + 6z_1z_2. \end{aligned}$$

Quindi

$$q(u + v) - q(u) - q(v) = 2x_1x_2 - 4(x_1z_2 + x_2z_1) + 4y_1y_2 + 6z_1z_2.$$

Dividendo per 2, otteniamo la forma bilineare polare:

$$\varphi(u, v) = x_1x_2 - 2(x_1z_2 + x_2z_1) + 2y_1y_2 + 3z_1z_2.$$

(iv) Sia data la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 2xz.$$

$$\begin{aligned} q(u+v) &= 6(x_1+x_2)^2 + 4(y_1+y_2)^2 + 2(x_1+x_2)(z_1+z_2) \\ &= 6(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 4(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) + 2(x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2) \\ &= 6x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_1x_2 + 4y_1^2 + 4y_2^2 + 8y_1y_2 + 2x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 2x_2z_2 + 2z_1z_2 \end{aligned}$$

Quindi

$$q(u+v) - q(u) - q(v) = 12x_1x_2 + 8y_1y_2 + 2(x_1z_2 + x_2z_1).$$

Dividendo per 2, otteniamo la forma bilineare polare:

$$\varphi(u, v) = 6x_1x_2 + 4y_1y_2 + x_1z_2 + x_2z_1.$$

Esercizio 4 Sia data la forma bilineare simmetrica

$$\phi(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2,$$

dove $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Un vettore $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è isotropo se

$$\phi(v, v) = 0.$$

Calcoliamo:

$$\phi(v, v) = x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + x_2x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2.$$

Quindi

$$\phi(v, v) = 0 \iff (x_1 - x_2)^2 = 0 \iff x_1 = x_2.$$

Pertanto l'insieme dei vettori isotropi è

$$\{v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid x_1 = x_2\}.$$

Geometricamente, l'insieme dei vettori isotropi è la retta passante per l'origine di equazione

$$x_2 = x_1,$$

escludendo il punto 0. È quindi la diagonale del primo e terzo quadrante, privata dell'origine.

Esercizio 5 Sia lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la forma bilineare simmetrica definita da

$$B(x, y) = x^T A y,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Applicare il procedimento di Gram–Schmidt rispetto a B alla base canonica

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

- (b) Trovare una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ rispetto a B .

Sia $\mathbb{R}^3$ con la forma bilineare simmetrica

$$B(x, y) = x^\top A y, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la base canonica

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Procediamo come nel procedimento standard, ma usando il prodotto scalare definito da B :

$$u_1 = v_1 = (1, 0, 0)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{B(v_2, u_1)}{B(u_1, u_1)} u_1$$

Calcoliamo i coefficienti:

$$B(u_1, u_1) = v_1^\top A v_1 = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$B(v_2, u_1) = v_2^\top A u_1 = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Quindi

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2}u_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{B(v_3, u_1)}{B(u_1, u_1)}u_1 - \frac{B(v_3, u_2)}{B(u_2, u_2)}u_2$$

Calcoliamo i coefficienti:

$$B(v_3, u_1) = v_3^\top A u_1 = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(u_2, u_2) = u_2^\top A u_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{5}{2}$$

$$B(v_3, u_2) = v_3^\top A u_2 = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi

$$u_3 = v_3 - 0 - 0 = v_3 = (0, 0, 1)$$

—

Normalizziamo i vettori u_i rispetto a B :

$$e_1 = \frac{u_1}{\sqrt{B(u_1, u_1)}} = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\sqrt{B(u_2, u_2)}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, 0\right)$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\sqrt{B(u_3, u_3)}} = \frac{(0, 0, 1)}{\sqrt{1}} = (0, 0, 1)$$

Pertanto, una base ortonormale rispetto a B è

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \quad e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, 0 \right), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Esercizio 6 Date le seguenti matrici in $\mathbb{R}^3$ indicare quali di queste sono congruenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

È facile notare che A e B hanno rango massimo, mentre C no, quindi né A né B possono essere congruenti a C . Per capire se A e B sono congruenti dobbiamo trovare la loro segnatura.

(N.B. con la terna (a, b, c) si intende a : # autovalori positivi, b : # autovalori negativi, c : # autovalori nulli).

Le possibili segnature che A e B possono avere sono:

$$\sigma_1 = (3, 0, 0), \quad \sigma_2 = (2, 1, 0), \quad \sigma_3 = (1, 2, 0), \quad \sigma_4 = (0, 3, 0).$$

Procediamo con la matrice A : per il criterio di Sylvester (o dei minori) sappiamo che A non è né definita positiva né definita negativa, infatti $\det(A_1) = 0$, quindi possiamo escludere σ_1 e σ_4 . Inoltre, $\det(A) = -5 - 7(21) < 0$, quindi sappiamo che il segno del determinante è negativo. Possiamo quindi escludere σ_3 : infatti, se avessimo due autovalori negativi e uno positivo, il segno del determinante sarebbe positivo. Quindi abbiamo scoperto che $\sigma(A) = (2, 1, 0)$

Passiamo a B , $\det(B) = 14 - 18 = -4 < 0$ quindi $\sigma(B)$ sicuramente non è σ_1 o σ_3 (sempre per il fatto che se il numero di autovalori negativi è pari, allora il determinante sarebbe positivo).

Poi, applicando il criterio di Sylvester o dei minori, abbiamo che $\det(B_1) = -1 < 0$ e $\det(B_2) = -1 \cdot 9 = -9 < 0 \Rightarrow$ la matrice non è definita negativa, quindi $\sigma(B) \neq \{(0, 3, 0)\}$, quindi $\sigma(B) = (2, 1, 0)$ per esclusione.

Quindi possiamo concludere che A e B hanno la stessa segnatura, $\Rightarrow A \equiv B$.

Esercizio 7 Sia data l'applicazione bilineare

$$T : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$T(p(x), q(x)) = p'(0)q(1) + p'(1)q(0).$$

Consideriamo come base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}.$$

Sia $M(T)$ la matrice di T in questa base, con elementi

$$M(T)_{ij} = T(b_i, b_j), \quad b_i, b_j \in \mathcal{B}.$$

Calcoliamo gli elementi:

$$T(1, 1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$T(1, x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$T(1, x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$T(x, 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2,$$

$$T(x, x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1,$$

$$T(x, x^2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1,$$

$$T(x^2, 1) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$T(x^2, x) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$T(x^2, x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Quindi la matrice di T rispetto a $\mathcal{B}$ è:

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una forma bilineare T è *degenere* se esiste un vettore non nullo v tale che

$$T(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}_2[x].$$

Osserviamo la matrice $M(T)$: la prima riga è tutta zero. Questo significa che il vettore corrispondente a $b_1 = 1$ è annullato da T su ogni secondo argomento:

$$T(1, q(x)) = 0 \quad \forall q(x).$$

Quindi T è degenere.

Esercizio 8

Siano dati

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^T A y, \quad A = B^T B - B B^T.$$

(a) Calcolo della matrice A , autovalori e diagonalizzabilità

Calcoliamo separatamente $B^T B$ e $B B^T$:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$A = B^T B - B B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono immediatamente letti dalla matrice diagonale:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Essendo A già diagonale, risulta immediatamente **diagonalizzabile**.

(b) Descrizione degli insiemi V_1 e V_2

Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$F(x, x) = x^T A x = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2.$$

Quindi

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, x) = 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\},$$

che rappresenta un'iperbole con rami lungo l'asse x_1 .

Analogamente,

$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, x) = -1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = -1\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 - x_1^2 = 1\}$, che rappresenta un'iperbole con rami lungo l'asse x_2 .

Esercizio 9 Data una matrice M , ricordare che la traccia di M , denotata con $tr(M)$, è la somma delle entrate lungo la diagonale di M . Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$. Fissiamo una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$. Si consideri l'applicazione $f_X : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f_X(A, B) = tr(A^t X B)$.

- (a) Si dimostri che f_X è una forma bilineare
- (b) Si determini $M_e(f_X)$, la matrice di f_X rispetto alla base canonica di V , che ricordiamo è data da

$$\mathbf{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (c) Si stabilisca per quali X si ha che $M_e(f_X)$ è non degenere, per quali è simmetrica, e per quali antisimmetrica

Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 e sia fissata una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$. Definiamo

$$f_X : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_X(A, B) = tr(A^T X B).$$

- (a) **Dimostrazione che f_X è bilineare**

Sia $A_1, A_2, B_1, B_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$f_X(\alpha A_1 + \beta A_2, B) = tr((\alpha A_1 + \beta A_2)^T X B) = tr(\alpha A_1^T X B + \beta A_2^T X B) = \alpha tr(A_1^T X B) + \beta tr(A_2^T X B) = \alpha f_X(A_1, B) + \beta f_X(A_2, B),$$

quindi f_X è lineare nel primo argomento. Analogamente,

$$f_X(A, \alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha f_X(A, B_1) + \beta f_X(A, B_2),$$

quindi f_X è lineare anche nel secondo argomento. Pertanto f_X è una **forma bilineare**.

- (b) **Matrice della forma bilineare rispetto alla base canonica**

La base canonica di V è

$$\mathbf{e} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice di f_X rispetto a $\mathbf{e}$, denotata $M_e(f_X)$, ha come elementi

$$(M_e(f_X))_{ij} = f_X(E_i, E_j) = tr(E_i^T X E_j).$$

Sia

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Calcolando i prodotti:

$$E_1^T X E_1 = E_1 X E_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_1, E_1) = x_{11},$$

$$E_1^T X E_2 = E_1 X E_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_1, E_2) = 0,$$

$$E_1^T X E_3 = E_1 X E_3 = \begin{pmatrix} x_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_1, E_3) = x_{12},$$

$$E_1^T X E_4 = E_1 X E_4 = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_1, E_4) = 0,$$

$$E_2^T X E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{11} & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_2, E_1) = 0,$$

$$E_2^T X E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix} \implies f_X(E_2, E_2) = x_{11},$$

$$E_2^T X E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{12} & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_2, E_3) = 0,$$

$$E_2^T X E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{12} \end{pmatrix} \implies f_X(E_2, E_4) = x_{12}.$$

$$E_3^T X E_1 = \begin{pmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_3, E_1) = x_{21},$$

$$E_3^T X E_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_3, E_2) = 0,$$

$$E_3^T X E_3 = \begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_3, E_3) = x_{22},$$

$$E_3^T X E_4 = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_3, E_4) = 0.$$

$$E_4^T X E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_4, E_1) = 0,$$

$$E_4^T X E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix} \implies f_X(E_4, E_2) = x_{21},$$

$$E_4^T X E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{22} & 0 \end{pmatrix} \implies f_X(E_4, E_3) = 0,$$

$$E_4^T X E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \implies f_X(E_4, E_4) = x_{22}.$$

e così via. In generale, usando la disposizione standard, si ottiene:

$$M_e(f_X) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{22} \end{pmatrix}$$

(c) **Condizioni di non degenerazione, simmetria e antisimmetria**

- Notiamo che la matrice ha una struttura a blocchi 2x2:

$$M_e(f_X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_{12} & 0 \\ 0 & x_{12} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Per matrici a blocchi diagonale di questa forma, il determinante si può calcolare come il ****quadrato del determinante del blocco 2x2 principale****:

$$\det(M_e(f_X)) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^2.$$

Quindi la matrice è non degenera se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{cioè} \quad x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0.$$

- $M_e(f_X)$ è **simmetrica** è simmetrica se solo se $x_{12} = x_{21}$.
- $M_e(f_X)$ è **antisimmetrica** è antisimmetrica se solo se $x_{12} = -x_{21}$ e $x_{11} = x_{22} = 0$