Tutorato 1 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

2 ottobre 2025

Esercizio 1 Stabilire queli delle seguenti funzioni $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è un applicazione bilineare

1. $\varphi(x,y) = \mathrm{tr}\big((xy^\top)B\big)$ con $B \in M_n(\mathbb{R})$
2. $\varphi(x,y) = \frac{x^\top y}{\|x\|\,\|y\|}$
3. $\varphi(x,y) = \det([x,y,z]), \quad z \in \mathbb{R}^3$
4. $\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\,|y_j|$
5. $\varphi(x,y) = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right|$
6. $\varphi(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$
7. $\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2$

Esercizio 2 Ognuna di queste matrici rappresenta una forma bilineare in una data base B, scrivere la forma bilineare nella base canonica

1. $B = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ $M(\varphi)_B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ $M(\varphi)_B = \begin{pmatrix}17 & 11 & 18\\ 9 & 6 & 11\\ 7 & 6 & 9\end{pmatrix}$

3. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $M(\varphi)_B = \begin{pmatrix} 45 & 51 & -3 \\ 63 & 69 & -3 \\ -9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 In ciascuno dei seguenti casi si considerino le seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinare la forma bilineare polare e la sua matrice associata:

(i) $q(x, y, z) = 12x^2 + 5xy + 4y^2 + 7z^2$.

(ii) $q(x, y, z) = 4x^2 + 8xy + 2y^2$.

(iii) $q(x, y, z) = x^2 - 4xz + 2y^2 + 3z^2$.

(iv) $q(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 2xz$.

Esercizio 4 Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$\phi(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2,$$

dove $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$.

Determinare tutti i vettori isotropi $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, cioè tali che

$$\phi(v, v) = 0.$$

Descrivere geometricamente l'insieme dei vettori isotropi in $(\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5 Sia lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la forma bilineare simmetrica definita da

$$B(x, y) = x^T Ay,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Applicare il procedimento di Gram–Schmidt rispetto a B alla base canonica

$$v_1 = (1, 0, 0), \qquad v_2 = (0, 1, 0), \qquad v_3 = (0, 0, 1).$$

2. Trovare una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ rispetto a B.

Esercizio 6 Date le seguenti matrici in $\mathbb{R}^3$ indicare quali di queste sono congruenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} . C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 7 Sia data l'applicazione $T : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$T(p(x), q(x)) = p'(0)q(1) + p'(1)q(0)$$

Calcolare la matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}_2[x]$ a libera scelta.

T è degenere?

Esercizio 8 Siano B la seguente matrice quadrata di ordine due

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita come segue:

$$F(x, y) = x^T A y$$

dove $A = B^T B - B B^T$

1. Calcolare gli *autovalori* di A e stabilire se è una *matrice diagonalizzabile.*

2. Descrivere i seguenti insiemi:

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, x) = 1\}$$

$$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, x) = -1\}$$

Esercizio 9 Data una matrice M, ricordare che la traccia di M, denotata con $tr(M)$, è la somma delle entrate lungo la diagonale di M. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$. Fissiamo una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$. Si consideri l'applicazione $f_X : V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $f_X(A, B) = tr(A^t X B)$.

1. Si dimostri che f_X è una forma bilineare

2. Si determini$M_e(f_X)$, la matrice di f_X rispetto alla base canonica di V , che ricordiamo è data da

$$\mathbf{e} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$$

3. Si stabilisca per quali X si ha che $M_e(f_X)$ è non degenere, per quali è simmetrica, e per quali antisimmetrica