Tutorato 2 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

9 ottobre 2025

Esercizio 1 Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ che rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ è data da

$$q(z) = 2z_1^2 - 3z_1z_2 + \tfrac{1}{2}z_2^2, \qquad z = (z_1, z_2).$$

(a) Trovare una base diagonalizzante per q e la matrice di q in questa base.

(b) Trovare una base diagonalizzante tali che gli elementi sulla diagonale della rispettiva matrice di q siano solo uguali a 0 o 1.

Esercizio 2 Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare la matrice $B = A^T A$

(ii) Esplicitare la forma bilineare $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice B

Esercizio 3 Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione 3 con base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia

$$b : V \times V \to K$$

una forma bilineare simmetrica tale che

$$(*) \qquad b(e_i, e_i) = 2, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$e_3 \perp e_2 \quad \text{e} \quad e_1 \in (e_1 - 2e_2)^{\perp}.$$

(a) Determinare tutte le possibili forme bilineari b che soddisfano $(*)$ e, quando $K = \mathbb{R}$, trovare la loro forma canonica di Sylvester.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Per ogni b che soddisfa $(*)$ determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizzi b.

Esercizio 4 Data una matrice M, si indichi con $\Sigma(M)$ la somma di tutti i suoi elementi. Si considerino ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

lo spazio vettoriale $\mathcal{A}$ di tutte le matrici reali antisimmetriche di ordine 3 e l'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(X, Y) := \Sigma(XAY).$$

(i) Verificare che φ è una forma bilineare simmetrica.

(ii) Determinare il rango e la segnatura di φ.

(iii) Sia

$$U := \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mostrare che $\mathcal{A} = U \oplus U^{\perp}$ e dire se $\varphi|_{U \times U}$ è definita positiva.

Esercizio 5 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(X, Y) := \operatorname{Tr}(XAY).$$

(i) Verificare che φ è una forma bilineare simmetrica.

(ii) Determinare la segnatura e rango di φ individuando una base rispetto alla quale φ assuma la forma canonica.

(iii) Determinare l'insieme dei vettori isotropi rispetto a φ e stabilire se esso è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 6 Sia (V, φ) uno spazio euclideo di dimensione n e siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori in V non nulli e a due a due ortogonali.

(i) Dimostrare che k vettori non nulli $v_1, \ldots, v_k \in V$ a due a due ortogonali rispetto a φ sono sempre linearmente indipendenti (e quindi si ha necessariamente $k \leq n$).

(ii) Mostrare con un esempio che l'enunciato (i) è falso se φ non è definito positivo.

Esercizio 7 Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

(i) Dimostrare che φ è un prodotto scalare.

(ii) Scrivere la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$.

(iii) Determinare una base ortonormale per φ.

(iv) Determinare una matrice C tale che $C^\top AC = I$.

Esercizio 8 Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo reale. Lo *spazio* $L^1([a, b])$ è definito come l'insieme delle funzioni misurabili $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che l'integrale del valore assoluto sia finito:

$$L^1([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Dando per buono che $L^1([a, b])$ sia uno spazio vettoriale, dimostrare che su la seguete applicazione è una norma

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

. Dimostrare che L1 è uno spazio normato, ma non uno spazio euclideo.