Tutorato 3 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

16 ottobre 2025

Esercizio 1 Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_2(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare standard. Verificare che i vettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

costituiscano una base di V ed applicarvi il procedimento di Gram–Schmidt.

Esercizio 2 Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(i) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

$$b(e_3, e_3) = k+1, \quad b(e_1, e_1) = k, \quad b(e_1, e_3) = -1, \quad b(e_2, e_2) = 1, \quad b(e_2, e_1) = -1$$

e che il coefficiente di Fourier di $e_2 + e_3$ rispetto a e_2 è 1;

(ii) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

Esercizio 3
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

1. Diagonalizzare la matrice A al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
2. Determinare la segnatura della forma quadratica associata a A al variare di k.

Esercizio 4 Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & 4 \\ -5 & 4 & 19 \end{pmatrix}$$

Si stabilisca, utilizzando il criterio dei minori principali, se la matrice è (semi) definita positiva, (semi) definita negativa oppure indefinita.

Esercizio 5 Diagonalizzare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ data da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_3 + x_2^2 + 2kx_1x_4 - 2x_2x_4 + kx_4^2.$$

Calcolare inoltre la dimensione del sottospazio ortogonale di

$$W = \langle (1,0,0,0),\ (1,1,1,0),\ (0,1,k,1) \rangle$$

rispetto a Q al variare di k.

Esercizio 6 Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$, con $v \neq 0$.

(a) Dimostrare che l'applicazione

$$f_v : V \to \langle v \rangle, \quad f_v(w) = \mathrm{a_v(w)\,v}$$

che ad ogni $w \in V$ associa la sua proiezione ortogonale sulla direzione di v, è lineare. Ricordiamo che dove il coefficiente scalare è dato da:

$$a_v(w) = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

(b) L'applicazione

$$\rho_v : V \to v^{\perp}, \quad \rho_v(w) = w - \mathrm{av(w)\,v}$$

si dice *proiezione ortogonale di V su $v^{\perp}$*. Verificare che ρ_v è lineare.

Esercizio 7 Per ogni $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ dimostrare che

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

e calcolare $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ sapendo che:

$$\|\vec{u}\| = 5, \quad \|\vec{v}\| = 2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -6.$$

Esercizio 8 Calcolare le componenti di un **vettore ortogonale** ai vettori

$$\vec{v} = (5,0,2), \quad \vec{w} = (1,2,-1).$$

Esercizio 9 Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori ortogonali tra loro e tali che

$$\|\vec{u}\| = 2, \quad \|\vec{v}\| = 3.$$

Sia inoltre:

$$\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v}).$$

Calcolare la **norma** di $\vec{w}$.

Esercizio 10 $\vec{u}, \vec{v}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^3$ appartenenti al piano $[xy]$, con seconda componente positiva, aventi come punto di applicazione l'origine, e tali da formare col semiasse positivo delle ascisse due angoli ampi, rispettivamente, di $60°$ e $30°$.

Sapendo che $\|\vec{u}\| = 4$ e che $\|\vec{v}\| = 5$, calcolare:

- le componenti dei due vettori;
- il modulo del prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{v}$.