Tutorato 5 di GE210

Tutori: Elisa De Angelis & Fabio Vaccari

30 ottobre 2025

Esercizio 1

Sia E lo spazio euclideo standard di dimensione 4, sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e h un versore di $\mathbb{R}^4$. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\varphi(x) = x - \lambda\langle x, h\rangle h$$

Determinare per quali λ φ è un operatore unitario.

Esercizio 2

Dati i seguenti operatori lineari da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare se sono unitari rispetto al prodotto scalare standard:

1. $$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. $$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $$T_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$T_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo l'applicazione bilineare $b(x, y) = x^T A y$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b è un prodotto scalare? stabilire se gli operatori precedenti sono unitari rispetto a $(\mathbb{R}^3, b)$

Esercizio 3

Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale euclideo delle matrici 2×2 con prodotto scalare

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

Per $k \in \mathbb{R}$, sia $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e $T : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $T(A) = B \cdot A$.

1. Determinare per quali k, T è un operatore unitario su V
2. Calcolare $\|T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \wedge T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\|$

Esercizio 4

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione dispari e $T : V \to V$ un operatore unitario. Mostrare che esiste $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $T(T(v)) = v$.

Esercizio 5

Determinare il coseno dell'angolo convesso formato dalle due seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r : \begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ x - 5y + 2z = -2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 6

Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano

$$\pi : \ x + 2y - 2z + 3 = 0,$$

il punto $A(1,\, 0,\, 2)$ e una distanza fissata $r = 2$.

1. Determinare tutte le rette r perpendicolari al piano π e poste a distanza r dal punto A.

Esercizio 7

Si consideri lo spazio di Hilbert

$$H = (L^2([0,1], \mathbb{C})$$

dotato del prodotto scalare standard

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

Si definisca l'operatore lineare $U : H \to H$ come

$$(Uf)(t) = e^{2\pi i t}\, f(t), \qquad \text{per ogni } f \in L^2([0,1]).$$

1. Mostrare che U è un operatore *unitario*, cioè che soddisfa

$$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{per ogni } f, g \in H.$$

2. Determinare l'aggiunto U^* di U.

Esercizio 8

Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ con il prodotto scalare standard

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}.$$

Si consideri l'operatore lineare $U_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definito dalla matrice

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Mostrare che U_θ è un operatore *unitario*, ossia che soddisfa

$$U_\theta^* U_\theta = I.$$

2. Calcolare l'aggiunto U_θ^* e verificare che

$$U_\theta^{-1} = U_{-\theta}.$$

3. Determinare il determinante di U_θ e interpretarne il significato geometrico.