*NOTE DEL CORSO*

**GE510 - GEOMETRIA ALGEBRICA 2**

*A.A. 2023-2024*

A.F. LOPEZ

Contents



Queste note sono una semplice rielaborazione delle note dello stesso corso impartito dal Prof. Sernesi nel 2016/2017, che ringraziamo per le bellissime note scritte. Si consiglia di consultare anche [H] e [K].

## 1. Limiti induttivi e limiti proiettivi

**Definizione 1.1.** Sia $(I, \leq)$ un *insieme parzialmente ordinato*. Lo diremo *filtrante* (oppure *diretto*) se per ogni $i, j \in I$ esiste $k \in I$ tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Sono esempi di insiemi parzialmente ordinati filtranti $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ e $\mathcal{P}(X)$, l'insieme delle parti di un insieme $X$, rispetto alla relazione $\subseteq$. Se $x \in X$ allora l'insieme $\mathcal{U}_x$ dei sottoinsiemi $U \subseteq X$ contenenti $x$ è filtrante rispetto alla relazione di contenimento $\supseteq$.

*Date*: 29-04-2024.

Possiamo considerare $(I, \leq)$ come una categoria i cui oggetti sono gli $i \in I$ e $\mathrm{Hom}(i, j)$ consiste di un solo elemento oppure è vuoto a seconda che $i \leq j$ oppure $i \not\leq j$.

**Definizione 1.2.** Un *sistema induttivo in una categoria $\mathcal{A}$ indicizzato da* $(I, \leq)$ è un funtore covariante
$$F : (I, \leq) \longrightarrow \mathcal{A}.$$
Esso consiste di una famiglia di oggetti $\{F(i) = A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\}_{i \in I}$ e di un morfismo
$$F(i \leq j) = f_{ji} : A_i \to A_j \text{ per ogni } i \leq j$$
in modo che si abbia
$$f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$$
per ogni $i \in I$ e di un diagramma commutativo
$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_{ki}"'] & & A_j \arrow[dl, "f_{kj}"] \\
& A_k &
\end{tikzcd}$$
per ogni $i \leq j \leq k$. Il *sistema induttivo* $\{A_i, f_{ji}\}_{i \in I}$ si dirà *filtrante* se $(I, \leq)$ è filtrante.

Se $\mathcal{A} = Ins$, risp. ($Ab$, $An$, ecc.) parleremo di un sistema induttivo di insiemi (risp. gruppi abeliani, anelli commutativi, ecc.).

**Definizione 1.3.** Una famiglia $\{\psi_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ di morfismi in $\mathcal{A}$ si dirà *compatibile* con il sistema induttivo se è commutativo il diagramma
$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$
per ogni $i \leq j$.

**Definizione 1.4.** Un famiglia compatibile $\{\phi_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ si dice un *limite induttivo*
$$\varinjlim_{i \in I} A_i \text{ (oppure } \varinjlim F)$$
di un sistema induttivo dato, se per ogni altra famiglia compatibile $\{\psi_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ esiste un unico morfismo $\chi : A \to B$ che rende commutativi tutti i diagrammi seguenti
$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& A \arrow[d, "\chi"] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

**Esercizio 1.5.** Un limite induttivo, se esiste, è unico a meno di isomorfismo unico.

**Esercizio 1.6.** Sia $\{A_i, f_{ji}\}_{i \in I}$ un sistema induttivo filtrante di insiemi, gruppi abeliani, ecc.. Definiamo su $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ la seguente relazione $\sim$: se $a, a' \in \bigsqcup_{i \in I} A_i$, allora $\exists!\ i, j \in I$ tali che $a \in A_i$ e $a' \in A_j$. Diremo che $a \sim a'$ se e solo se esiste $k \in I$ tale che $i \leq k$, $j \leq k$ e $f_{ki}(a) = f_{kj}(a')$. Allora il limite induttivo di $\{A_i, f_{ji}\}_{i \in I}$ è il quoziente
$$\varinjlim_{i \in I} A_i := (\bigsqcup_{i \in I} A_i)/_{\sim}$$

**Esercizio 1.7.** L'insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ si dirà *discreto* se $i \not\leq j$ per ogni $i \neq j$. Se $(I, \leq)$ è discreto, un sistema induttivo $F : (I, \leq) \to \mathcal{A}$ è nient'altro che il dato di oggetti $A_i = F(i) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Se $\mathcal{A} = \mathrm{Ins}$ allora

$$\varinjlim F = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

Se $\mathcal{A} = Ab$ allora

$$\varinjlim F = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

La nozione duale di limite induttivo è la seguente.

**Definizione 1.8.** Sia $(I, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. *Un sistema proiettivo in $\mathcal{A}$ indicizzato da $(I, \leq)$* è un funtore contravariante

$$F : (I, \leq) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Esso consiste di una famiglia di oggetti $\{F(i) = A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\}_{i \in I}$ e di un morfismo

$$f_{ji} : A_i \longrightarrow A_j$$

per ogni $i \geq j$ in modo che $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ per ogni $i \in I$ e

$$f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$$

per ogni $k \leq j \leq i$.

Se $\mathcal{A} = Ins, Ab, An$ parleremo di un *sistema proiettivo di insiemi (risp. gruppi abeliani, anelli commutativi) indicizzato da* $(I, \leq)$.

**Definizione 1.9.** Una famiglia di morfismi $\{\psi_i : B \to A_i\}_{i \in I}$ si dirà *co-compatibile* con il sistema proiettivo dato se è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\psi_j"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] & & A_j \end{tikzcd}$$

per ogni $i \geq j$.

**Definizione 1.10.** Una famiglia co-compatibile $\{\phi_i : A \to A_i\}_{i \in I}$ si dice un *limite proiettivo*

$$\varprojlim_{i \in I} A_i \text{ (oppure } \varprojlim F)$$

del sistema proiettivo dato se per ogni altra famiglia co-compatibile $\{\psi_i : B \to A_i\}_{i \in I}$ esiste un unico $\zeta : B \to A$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\zeta"] \arrow[ddl, "\psi_i"'] \arrow[ddr, "\psi_j"] & \\ & A \arrow[dl, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_j"'] & \\ A_i \arrow[rr, "f_{ji}"'] & & A_j \end{tikzcd}$$

per ogni $i \geq j$.

**Esercizio 1.11.** Se un limite proiettivo esiste allora è unico, a meno di isomorfismo unico.

**Esercizio 1.12.** Il limite proiettivo di un sistema proiettivo $\{A_i, f_{ji}\}_{i \in I}$ di insiemi/gruppi ecc. esiste ed è

$$\varprojlim_{i \in I} A_i = \{(s_i) \in \prod_{i \in I} A_i : f_{ji}(s_i) = s_j \text{ per ogni } i \geq j\}$$

Quindi mentre il limite induttivo è un quoziente dell'unione degli $A_i$, il limite proiettivo è un sottoinsieme del prodotto.

**Esempio 1.13.** Sia $Y$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{T}$ la famiglia degli aperti di $Y$. Allora $(\mathcal{T}, \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Un funtore contravariante

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$$

è un *prefascio* su $Y$ a valori in $\mathcal{A}$.

## 2. Prefasci e fasci

Il concetto di fascio è fondamentale in geometria algebrica. In questo paragrafo raccogliamo alcuni fatti importanti di teoria dei fasci.

**Definizione 2.1.** Sia $Y$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in I}$ una base della topologia di $Y$. Un *prefascio* di insiemi/gruppi abeliani/ecc. su $\mathcal{B}$ consiste di insiemi/gruppi abeliani/ecc. $\{\mathcal{F}(U_i)\}_{i \in I}$ ed di morfismi

$${}^{\mathcal{F}}\rho^{U_i}_{U_j} = \rho^{U_i}_{U_j} : \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \mathcal{F}(U_j)$$

per ogni inclusione $U_j \subseteq U_i$, in modo che si abbia:

(a) $\rho^{U_i}_{U_i} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U_i)}$ per ogni $i \in I$.
(b) $\rho^{U_j}_{U_k} \circ \rho^{U_i}_{U_j} = \rho^{U_i}_{U_k}$ per ogni $U_k \subseteq U_j \subseteq U_i$.

Più in generale un prefascio su $\mathcal{B}$ a valori in una categoria $\mathcal{A}$ è un funtore contravariante

$$(\mathcal{B}, \subseteq) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Un prefascio su $\mathcal{B}$ si dice un *fascio su* $\mathcal{B}$ se soddisfa la seguente condizione:

(c) Se $U \in \mathcal{B}$ e $\{U_h\}_{h \in H}$ è un ricoprimento di $U$ con aperti di $\mathcal{B}$, allora per ogni collezione $(s_h) \in \prod_{h \in H} \mathcal{F}(U_h)$ tale che si abbia

$$\rho^{U_h}_{W}(s_h) = \rho^{U_k}_{W}(s_k)$$

per ogni $h, k \in H$ e per ogni $W \in \mathcal{B}$ contenuto in $U_h \cap U_k$, esiste un unico $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\rho^{U}_{U_h}(s) = s_h$$

per ogni $h \in H$.

Se come base $\mathcal{B}$ si prende la famiglia di tutti gli aperti di $Y$ allora si parlerà di prefasci e fasci su $Y$.

**Osservazione 2.2.** È usuale definire $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$ l'insieme costituito da un unico elemento (nel caso di gruppi, ecc. $* = 0$). Ciò in realtà segue dalla (c) prendendo $H = \emptyset$, ma molti testi preferiscono esplicitare questo fatto.

Diamo due esempi di fasci.

**Esempio 2.3.** Sia $Y$ uno spazio topologico e sia $G$ un gruppo abeliano, con la topologia discreta. Per ogni aperto $U$ di $Y$ sia

$$\underline{G}(U) = \{f : U \to G \text{ continua}\}.$$

Per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ sia

$$\rho^{U}_{V} : \underline{G}(U) \to \underline{G}(V)$$

la restrizione a $V$. È facile vedere (esercizio) che in questo modo abbiamo definito un fascio $\underline{G}$ su $Y$. Questo fascio si chiama *fascio costante*. Come è facile verificare si ha infatti che se $U$ è connesso allora $\underline{G}(U) \cong G$.

**Esempio 2.4.** Sia ora $X$ una varietà quasi proiettiva su un campo $k$ e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio definito da

$$\mathcal{O}_X(U) = k[U] = \{f : U \to k \text{ regolare}\}$$

con le ovvie restrizioni.

Si tratta di un fascio di anelli su $X$ (esercizio). Come vedremo la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato.

Un esempio di un prefascio che non è un fascio è il seguente.

**Esempio 2.5.** Siano $Y = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e definiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{F}(U) = \{0\} \text{ per ogni aperto } U \neq \mathbb{R}$$

con restrizioni $\rho_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ e $\rho_V^U = 0$ se $V \neq \mathbb{R}$. È facile vedere che $\mathcal{F}$ è un prefascio e del resto $\overline{0} \neq \overline{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mentre su un qualsiasi ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di $\mathbb{R}$ con aperti $U_i \neq \mathbb{R}$ si ha ovviamente che $\rho_{U_i}^{\mathbb{R}}(\overline{0}) = 0 = \rho_{U_i}^{\mathbb{R}}(\overline{1})$ per ogni $i \in I$, quindi la (c) non è soddisfatta.

Il risultato seguente permette di definire un fascio su $Y$ partendo da un fascio su una base. Verrà utilizzato per definire gli schemi affini.

**Proposizione 2.6.** *Sia $Y$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di $Y$. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su $\mathcal{B}$. Allora esiste un prefascio $\mathcal{F}'$ su $Y$ con isomorfismi $f_U : \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(U)$ per ogni $U \in \mathcal{B}$ che commutano con le restrizioni sugli aperti di $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{F}$ è un fascio su $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{F}'$ è un fascio su $Y$ ed è unico con questa proprietà (nel senso che per ogni fascio $\mathcal{F}''$ su $Y$ con isomorfismi $\mathcal{F}''(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(U)$ per ogni $U \in \mathcal{B}$ che commutano con le restrizioni sugli aperti di $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{F}''(V) \cong \mathcal{F}'(V)$ per ogni aperto $V$ di $Y$).*

*Dimostrazione.* Denotiamo le restrizioni di $\mathcal{F}$ con $\rho_W^V$. Per ogni aperto non vuoto $U$ di $Y$ definiamo

$$\mathcal{F}'(U) = \varprojlim_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) = \{(s_V) \in \prod_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) : \rho_W^V(s_V) = s_W, \ \forall W \subseteq V, W \in \mathcal{B}\}$$

dove il limite è preso sul sistema proiettivo $\{\mathcal{F}(V), V \in \mathcal{B} : V \subseteq U, \rho_W^V\}$.

Per ogni $U' \subseteq U$ la restrizione di $\mathcal{F}'$

$$^{\mathcal{F}'}\rho_{U'}^U : \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U')$$

è l'applicazione indotta dalla proiezione

$$\pi_{U'}^U : \prod_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \longrightarrow \prod_{U' \supseteq V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V).$$

Sia $s = (s_V)_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U)$.

Osserviamo che

$$^{\mathcal{F}'}\rho_{U'}^U(s) = (s_V)_{U' \supseteq V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U')$$

dato che, essendo $s \in \mathcal{F}'(U)$, abbiamo che $\rho_W^V(s_V) = s_W, \ \forall W \subseteq V, W \in \mathcal{B}$.

Verifichiamo ora che $\mathcal{F}'$ è un prefascio: se $U' = U$ la proiezione $\pi_{U'}^U$ è l'identità, da cui $^{\mathcal{F}'}\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}'(U)}$. Se $U'' \subseteq U' \subseteq U$ abbiamo ovviamente che $\pi_{U''}^U = \pi_{U''}^{U'} \circ \pi_{U'}^U$ da cui $^{\mathcal{F}'}\rho_{U''}^U = {}^{\mathcal{F}'}\rho_{U''}^{U'} \circ {}^{\mathcal{F}'}\rho_{U'}^U$.

Sia ora $U \in \mathcal{B}$. Consideriamo i morfismi

$$f_U : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \text{ definito da } f_U(s) = s_U$$

e

$$g : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U) \text{ definito da } g(u) = (\rho_V^U(u))_{U \supseteq V \in \mathcal{B}}.$$

Si ha

$$g(f_U(s)) = g(s_U) = (\rho_V^U(s_U))_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} = (s_V)_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} = s$$

e

$$f_U(g(u)) = f_U((\rho_V^U(u))_{U \supseteq V \in \mathcal{B}}) = \rho_U^U(u) = u.$$

Dunque $f_U$ è un isomorfismo per ogni $U \in \mathcal{B}$. Inoltre se $U, U' \in \mathcal{B}$ con $U' \subseteq U$, abbiamo, per ogni $s = (s_V)_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U)$, che

$$\rho^U_{U'}(f_U(s)) = \rho^U_{U'}(s_U) = s_{U'}$$

e

$$f_{U'}({}^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U'}(s)) = f_{U'}((s_V)_{U' \supseteq V \in \mathcal{B}}) = s_{U'}$$

quindi

$$\rho^U_{U'} \circ f_U = f_{U'} \circ {}^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U'}$$

ovvero $f_U$ commuta con le restrizioni sugli aperti di $\mathcal{B}$.

Ora verifichiamo che se $\mathcal{F}$ è un fascio su $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{F}'$ è un fascio su $Y$.

Sia $U = \bigcup_{h \in H} U_h$ un ricoprimento aperto di $U$ e siano $s_h \in \mathcal{F}'(U_h)$ tali che

$$(1) \qquad {}^{\mathcal{F}'}\rho^{U_h}_W(s_h) = {}^{\mathcal{F}'}\rho^{U_k}_W(s_k) \quad \forall h, k \in H, \forall W \subseteq U_h \cap U_k, W \text{ aperto.}$$

Abbiamo allora che $s_h = (s_{h,V})_{U_h \supseteq V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U_h)$ e quindi, per definizione di $\mathcal{F}'(U_h)$,

$$(2) \qquad \rho^V_W(s_{h,V}) = s_{h,W}, \ \forall W \subseteq V, W \in \mathcal{B}.$$

Inoltre la (1) diventa

$$(s_{h,V})_{W \supseteq V \in \mathcal{B}} = (s_{k,V})_{W \supseteq V \in \mathcal{B}}$$

da cui

$$(3) \qquad s_{h,W} = s_{k,W} \text{ se } W \subseteq V, W \in \mathcal{B}.$$

Costruiremo la sezione $s \in \mathcal{F}'(U)$ che "incolla" le $s_h \in \mathcal{F}'(U_h)$ utilizzando delle $s_V$ "incollamento" delle $s_{h,V}$ per ogni aperto $V$ tale che $U \supseteq V \in \mathcal{B}$.

Consideriamo il seguente ricoprimento aperto (che esiste perché $\mathcal{B}$ è una base)

$$V = \bigcup_{h \in H} V \cap U_h = \bigcup_{h \in H} \bigcup_{V \cap U_h \supseteq V' \in \mathcal{B}} V'.$$

Per ogni $h \in H$ e per ogni $V'$ tale che $V \cap U_h \supseteq V' \in \mathcal{B}$ è definita $s_{h,V'}$. Ora, preso $k \in H$, preso $V''$ tale che $V \cap U_k \supseteq V'' \in \mathcal{B}$ e preso $W \in \mathcal{B}$ tale che $W \subseteq V' \cap V''$ si ha ovviamente $W \subseteq U_h \cap U_k$ e $W \subseteq V$ quindi, usando (2) e (3)

$$\rho^{V'}_W(s_{h,V'}) = s_{h,W} = s_{k,W} = \rho^{V''}_W(s_{k,V''}).$$

Essendo $\mathcal{F}$ un fascio, ne segue che, per ogni $V \in \mathcal{B}$, esiste una sezione $s_V \in \mathcal{F}(V)$ tale che

$$(4) \qquad \rho^V_{V'}(s_V) = s_{h,V'}, \ \forall h \in H \text{ e } \forall V' \text{ tale che } V \cap U_h \supseteq V' \in \mathcal{B}.$$

In particolare (prendendo $V' = V$) abbiamo anche che

$$(5) \qquad s_V = s_{h,V} \text{ se } U_h \supseteq V \in \mathcal{B}.$$

Sia ora $s := (s_V)_{U \supseteq V \in \mathcal{B}}$. Mostriamo che $s \in \mathcal{F}'(U)$, ovvero che

$$(6) \qquad \rho^V_W(s_V) = s_W, \ \forall W \subseteq V, W \in \mathcal{B}.$$

Ma $\rho^V_W(s_V)$ e $s_W$ sono sezioni in $\mathcal{F}(W)$ e, essendo $\mathcal{F}$ un fascio su $\mathcal{B}$, per la proprietà (c), è sufficiente verificare che $\rho^V_W(s_V)$ e $s_W$ coincidono su un ricoprimento aperto di $W$ con elementi di $\mathcal{B}$. Consideriamo allora il ricoprimento aperto

$$W = \bigcup_{h \in H} W \cap U_h = \bigcup_{h \in H} \bigcup_{W \cap U_h \supseteq W' \in \mathcal{B}} W'.$$

Abbiamo, applicando la commutatività delle restrizioni e la (4) su $V$ con $V' = W'$,

$$\rho^W_{W'}(\rho^V_W(s_V)) = \rho^V_{W'}(s_V) = s_{h,W'}$$

e, sempre per la (4) su $W$ con $V' = W'$,

$$\rho^W_{W'}(s_W) = s_{h,W'}.$$

Dunque $\rho^W_{W'}(\rho^V_W(s_V)) = \rho^W_{W'}(s_W)$ e quindi la (6) è dimostrata e pertanto $s \in \mathcal{F}'(U)$. Ora vediamo che $s$ restringe, con le restrizioni di $\mathcal{F}'$, a $s_h$ per ogni $h \in H$. Si ha, usando la (5),

$$^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U_h}(s) = (s_V)_{U_h \supseteq V \in \mathcal{B}} = (s_{h,V})_{U_h \supseteq V \in \mathcal{B}} = s_h.$$

Mostriamo inoltre che $s$ è unica. Sia $t = (t_V)_{U \supseteq V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U)$ tale che

$$^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U_h}(s) = {}^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U_h}(t) \ \forall h \in H. \tag{7}$$

Per mostrare che $s = t$ è sufficiente mostrare che $s_V = t_V$ per ogni $V$ tale che $U \supseteq V \in \mathcal{B}$. Questo, del resto, sarà sufficiente verificarlo sul ricoprimento aperto

$$V = \bigcup_{h \in H} V \cap U_h = \bigcup_{h \in H} \bigcup_{V \cap U_h \supseteq V' \in \mathcal{B}} V'$$

ovvero che

$$\rho^V_{V'}(s_V) = \rho^V_{V'}(t_V), \ \forall V' \subseteq V \cap U_h, V' \in \mathcal{B}. \tag{8}$$

Dalla (7) deduciamo che

$$(s_{V_1})_{U_h \supseteq V_1 \in \mathcal{B}} = {}^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U_h}(s) = {}^{\mathcal{F}'}\rho^U_{U_h}(t) = (t_{V_1})_{U_h \supseteq V_1 \in \mathcal{B}}$$

da cui, in particolare, essendo $s, t \in \mathcal{F}'(U)$ abbiamo, per ogni $V'$ tale che $V \cap U_h \supseteq V' \in \mathcal{B}$, applicando la precedente uguaglianza per $V_1 = V'$,

$$\rho^V_{V'}(s_V) = s_{V'} = t_{V'} = \rho^V_{V'}(t_V)$$

e quindi la (8) è dimostrata e pertanto $\mathcal{F}'$ è un fascio. Lasciamo per esercizio la verifica dell'unicità di $\mathcal{F}'$. $\square$

Un fascio $\mathcal{F}$ su $Y$ possiede due aspetti, uno globale $\mathcal{F}(Y)$, ed uno locale, come si evince dalla seguente

**Definizione 2.7.** Sia $\mathcal{F}$ un prefascio sulla base $\mathcal{B}$ di uno spazio topologico $Y$ e sia $p \in Y$. Lo *stelo* (o *spiga*) di $\mathcal{F}$ in $p$ è

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim_{U \in \mathcal{B}_p} \mathcal{F}(U)$$

dove il limite induttivo è preso rispetto al sistema induttivo filtrante $\mathcal{B}_p$ di tutti gli aperti di $\mathcal{B}$ contenenti $p$, rispetto alla relazione $\supseteq$ e rispetto alle restrizioni $\rho^U_V$. Gli elementi di $\mathcal{F}_p$ si chiamano *germi*. Ad ogni $U \in \mathcal{B}_p$ e ad ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ resta associato un elemento $\sigma_p \in \mathcal{F}_p$, chiamato il *germe di* $\sigma$.

**Osservazione 2.8.** Siano $U, V \in \mathcal{B}_p$ e siano $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$. Allora, per definizione di limite (vedasi l'Esercizio 1.6), $\sigma_p = \tau_p$ se e solo se esiste $W \in \mathcal{B}_p$ tale che $W \subseteq U \cap V$ e $\rho^U_W(\sigma) = \rho^V_W(\tau)$. La classe di equivalenza di $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ verrà denotata con $[\sigma] \in \mathcal{F}_p$, ovvero $[\sigma] = \sigma_p$.

Le sezioni di un fascio sono determinate dai loro germi, come si deduce dal seguente

**Lemma 2.9.** *Sia $Y$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di $Y$. Sia $\mathcal{F}$ un fascio su $\mathcal{B}$ e siano $U \in \mathcal{B}$ e $s, s' \in \mathcal{F}(U)$. Allora $s = s'$ se solo se $s_p = s'_p$ per ogni $p \in U$.*

*Dimostrazione.* $\Longrightarrow$ : ovvia. $\Longleftarrow$ : per l'Osservazione 2.8 esiste $U_p \in \mathcal{B}_p$ tale che $U_p \subseteq U$ e $\rho^U_{U_p}(s) = \rho^U_{U_p}(s')$. Nel ricoprimento aperto

$$U = \bigcup_{p \in U} U_p$$

definiamo $\sigma_{U_p} = \rho^U_{U_p}(s) \in \mathcal{F}(U_p)$. Per ogni $p, q \in U$ e per ogni $W \in \mathcal{B}_p$ tale che $W \subseteq U_p \cap U_q$ si ha

$$\rho^{U_p}_W(\sigma_{U_p}) = \rho^{U_p}_W(\rho^U_{U_p}(s)) = \rho^U_W(s)$$

e, analogamente, $\rho_W^{U_q}(\sigma_{U_q}) = \rho_W^U(s)$, da cui

$$\rho_W^{U_p}(\sigma_{U_p}) = \rho_W^{U_q}(\sigma_{U_q})$$

e quindi, essendo $\mathcal{F}$ un fascio, esiste un'unica sezione $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho_{U_p}^U(\sigma) = \sigma_{U_p}$ per ogni $p \in U$. Ma $\sigma_{U_p} = \rho_{U_p}^U(s)$ da cui deduciamo che $\rho_{U_p}^U(\sigma) = \rho_{U_p}^U(s)$ e pertanto $\sigma = s$. Analogamente $\sigma = s'$ e quindi $s = s'$. □

**Definizione 2.10.** Siano $Y$ uno spazio topologico e siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ prefasci (o fasci) su $Y$. Un *morfismo* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il dato di una famiglia di morfismi $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto $U$ di $Y$ tali che per ogni aperto $V \subseteq U$, il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "{}^{\mathcal{F}}\rho_V^U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{}^{\mathcal{G}}\rho_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Inoltre il morfismo $\varphi$ induce, per ogni punto $p \in Y$, un (ben definito) morfismo sugli steli

$$\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$$

definito, per ogni $\sigma_p = [\sigma] \in \mathcal{F}_p$, con $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, da

$$\varphi_p(\sigma_p) = (\varphi(U)(\sigma))_p.$$

È importante capire quando un morfismo è iniettivo, suriettivo o biiettivo e la relazione con i morfismi sugli aperti. Come vedremo ci sono importanti differenze che poi decreteranno la nascita della coomologia.

**Definizione 2.11.** Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo tra prefasci (o fasci) su uno spazio topologico $Y$. Diremo che $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è *iniettivo/suriettivo/biiettivo*, se $\varphi_p$ lo è per ogni $p \in Y$. Diremo che $\varphi$ è un *isomorfismo* se $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è biiettivo per ogni aperto $U$ di $Y$.

Per quanto riguarda l'iniettività non ci sono sorprese (tra fasci):

**Proposizione 2.12.** *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo tra due prefasci su uno spazio topologico $Y$. Si ha:*

(i) *Se $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni aperto $U$ di $Y$, allora $\varphi$ è iniettivo;*
(ii) *Se $\mathcal{F}$ è un fascio e $\varphi$ è iniettivo, allora $\varphi(U)$ è iniettivo per ogni aperto $U$ di $Y$.*

*Dimostrazione.* Per vedere (i) sia $\varphi_p(\sigma_p) = \varphi_p(\tau_p)$ per certe sezioni $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$. Allora, per definizione di $\varphi_p$, si ha che

$$(\varphi(U)(\sigma))_p = (\varphi(V)(\tau))_p$$

e quindi, per definizione di germe, esiste un aperto $W$ tale che

$$p \in W \subseteq U \cap V \text{ e } \rho_W^U(\varphi(U)(\sigma)) = \rho_W^V(\varphi(V)(\tau))$$

dove, per comodità, omettiamo il riferimento a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ nelle restrizioni.

Per definizione di morfismo, si ha

$$\rho_W^U(\varphi(U)(\sigma)) = \varphi(W)(\rho_W^U(\sigma)) \text{ e } \rho_W^V(\varphi(V)(\tau)) = \varphi(W)(\rho_W^V(\tau))$$

da cui deduciamo che

$$\varphi(W)(\rho_W^U(\sigma)) = \varphi(W)(\rho_W^V(\tau)).$$

Ma $\varphi(W)$ è iniettivo per ipotesi e quindi

$$\rho_W^U(\sigma) = \rho_W^V(\tau)$$

e questo, come sappiamo, vuol dire esattamente che $\sigma_p = \tau_p$. Dunque la (i) è dimostrata.

Per dimostrare la (ii) siano $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ tali che

$$\varphi(U)(\sigma) = \varphi(U)(\tau).$$

Per ogni $p \in U$ si ha allora che

$$\varphi_p(\sigma_p) = (\varphi(U)(\sigma))_p = (\varphi(U)(\tau))_p = \varphi_p(\tau_p).$$

Ma $\varphi_p$ è iniettiva per ipotesi, quindi $\sigma_p = \tau_p$ per ogni $p \in U$. Dato che $\mathcal{F}$ è un fascio, possiamo applicare il Lemma 2.9 e concludere che $\sigma = \tau$ e la (ii) è dimostrata. □

Utilizzando l'esempio fatto precedentemente facciamo vedere che la (ii) è in generale falsa se $\mathcal{F}$ non è un fascio.

Siano $Y = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $\mathcal{G}$ il fascio nullo su $Y$ (con le ovvie restrizioni), cioè $\mathcal{G}(U) = \{0\}$ per ogni aperto $U$ di $\mathbb{R}$ e sia invece $\mathcal{F}$ il prefascio (con le ovvie restrizioni) definito da $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}, \mathcal{F}(U) = \{0\}$ per ogni aperto $U \neq \mathbb{R}$.

Osserviamo che $\mathcal{F}_p = \mathcal{G}_p = \{0\}$ per ogni $p \in \mathbb{R}$. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ il morfismo nullo. Allora $\varphi_p$ è iniettivo per $p \in \mathbb{R}$ ma se prendiamo $1 \neq 2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ abbiamo che

$$\varphi(\mathbb{R})(1) = 0 = \varphi(\mathbb{R})(2)$$

e quindi $\varphi(\mathbb{R})$ non è iniettivo.

Analogamente all'iniettività, nel caso della biiettività tra fasci, si ha

**Proposizione 2.13.** *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo tra due fasci su uno spazio topologico $Y$. Allora $\varphi$ è biiettivo se e solo se $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è biiettivo per ogni aperto $U$ di $Y$.*

*Dimostrazione.* Se $\varphi(U)$ è biiettivo per ogni aperto $U$, sia

$$\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$$

definito da $\psi(U) = \varphi(U)^{-1}$. È facile verificare (esercizio) che $\psi$ è un morfismo.

Ora, per ogni $\sigma_p \in \mathcal{F}_p$ si ha

$$\psi_p \circ \varphi_p(\sigma_p) = \psi_p((\varphi(U)(\sigma))_p) = (\psi(U)(\varphi(U)(\sigma)))_p = \sigma_p$$

e questo dimostra che $\psi_p \circ \varphi_p = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_p}$. Analogamente si dimostra che $\varphi_p \circ \psi_p = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_p}$ e quindi $\varphi$ è biiettivo.

Ora supponiamo che $\varphi$ è biiettivo. In particolare $\varphi$ è iniettivo e quindi, per la Proposizione 2.12 (ii), $\varphi(U)$ è iniettiva per ogni aperto $U$.

Dimostriamo che $\varphi(U)$ è suriettiva. Sia $\sigma \in \mathcal{G}(U)$. Allora, per ogni $p \in U$ si ha che $\sigma_p \in \mathcal{G}_p$ e quindi, per ipotesi

$$\exists u \in \mathcal{F}_p \text{ tale che } \varphi_p(u) = \sigma_p.$$

Dato che $u \in \mathcal{F}_p$ si ha che esiste un aperto $U_p$ contenente $p$ e una sezione $\tau_{U_p} \in \mathcal{F}(U_p)$ tale che $u = [\tau_{U_p}]$. Poiché $\varphi_p(u) = \sigma_p$ si ha che

$$(\varphi(U_p)(\tau_{U_p}))_p = \sigma_p$$

e quindi esiste un aperto $V_p$ tale che $p \in V_p \subseteq U \cap U_p$ e tale che

$$\rho^{U_p}_{V_p}(\varphi(U_p)(\tau_{U_p})) = \rho^{U}_{V_p}(\sigma)$$

Ma

$$\rho^{U_p}_{V_p}(\varphi(U_p)(\tau_{U_p})) = \varphi(V_p)(\rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p}))$$

e quindi deduciamo che

$$\varphi(V_p)(\rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p})) = \rho^{U}_{V_p}(\sigma).$$

Sia $\gamma_{V_p} = \rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p}) \in \mathcal{F}(V_p)$. Quindi

$$\varphi(V_p)(\gamma_{V_p}) = \rho^{U}_{V_p}(\sigma). \tag{9}$$

Vogliamo dimostrare che, nel ricoprimento aperto

$$U = \bigcup_{p \in U} V_p$$

le $\gamma_{V_p}$ "si incollano" ad una sezione $\gamma \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\varphi(U)(\gamma) = \sigma.$$

Questo darà la suriettività di $\varphi(U)$ e concluderà quindi la dimostrazione.

Per ogni $p, q \in U$ e per ogni aperto $W$ tale che $W \subseteq V_p \cap V_q$ si ha, usando (9),

$$\varphi(W)(\rho_W^{V_p}(\gamma_{V_p})) = \rho_W^{V_p}(\varphi(V_p)(\gamma_{V_p})) = \rho_W^{V_p}(\rho_{V_p}^U(\sigma)) = \rho_W^U(\sigma)$$

Analogamente, lavorando con $q$, si ha

$$\varphi(W)(\rho_W^{V_q}(\gamma_{V_q})) = \rho_W^U(\sigma)$$

e quindi deduciamo che

$$\varphi(W)(\rho_W^{V_p}(\gamma_{V_p})) = \varphi(W)(\rho_W^{V_q}(\gamma_{V_q})).$$

Ma $\varphi(W)$ è iniettiva per ipotesi e quindi $\rho_W^{V_p}(\gamma_{V_p}) = \rho_W^{V_q}(\gamma_{V_q})$.

Allora, essendo $\mathcal{F}$ un fascio, esiste una sezione $\gamma \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\rho_{V_p}^U(\gamma) = \gamma_{V_p} \text{ per ogni } p \in U.$$

Ora per dimostrare che $\varphi(U)(\gamma) = \sigma$, essendo $\mathcal{G}$ un fascio, ci basterà dimostrare che le loro restrizioni coincidono su $V_p$ per ogni $p \in U$. Ma le restrizioni su $V_p$, usando (9), sono

$$\rho_{V_p}^U(\varphi(U)(\gamma)) = \varphi(V_p)(\rho_{V_p}^U(\gamma)) = \varphi(V_p)(\gamma_{V_p}) = \rho_{V_p}^U(\sigma)$$

e questo dimostra che coincidono. □

Per la suriettività le cose cambiano. Se $\varphi(U)$ è suriettiva per ogni $U$, è facile vedere che $\varphi$ lo è. Ma, in generale, invece non è vero che se $\varphi$ è suriettiva, allora $\varphi(U)$ è suriettiva per ogni $U$ (vedasi esempio 3.6 sulle note di Sernesi). Come vedremo più avanti questo è uno dei motivi dai quali nasce la coomologia.

Ora vogliamo spiegare una costruzione che associa un fascio ad ogni prefascio. Come vedremo verrà molto utile anche in seguito.

**Teorema 2.14.** *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico $Y$. Allora esiste un fascio $\mathcal{F}^+$ con un morfismo biiettivo*

$$\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$$

*che è un isomorfismo se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio.*

*Inoltre una coppia $(\mathcal{F}^+, \varepsilon)$ come sopra è unica a meno di isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto $U$ di $Y$ definiamo

$$\mathcal{F}^+(U) = \Big\{ s : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p : \forall p \in U \text{ si ha (1)[1] } s(p) \in \mathcal{F}_p \text{ e (2) } \exists U_p \text{ aperto: } p \in U_p \subseteq U \text{ e}$$
$$\exists \sigma \in \mathcal{F}(U_p) : \sigma_x = s(x) \ \forall x \in U_p \Big\}$$

e definiamo le restrizioni di $\mathcal{F}^+$ semplicemente come le restrizioni delle applicazioni $s : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$. Abbiamo quindi che $\mathcal{F}^+$ è un prefascio.

Ora per ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ sia $s_\sigma : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ definita da

$$s_\sigma(x) = \sigma_x, \text{ per ogni } x \in U.$$

Osserviamo che, proprio per come è definita, si ha che $s_\sigma$ soddisfa (1) e (2) e quindi $s_\sigma \in \mathcal{F}^+(U)$.

[1] In realtà la (1) segue dalla (2) con $x = p$, ma si usa lasciarla per spiegare meglio come è fatta l'applicazione $s$.

Sia ora
$$\varepsilon(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$$
definita da
$$\varepsilon(U)(\sigma) = s_\sigma.$$
Verifichiamo prima che questo definisce un morfismo
$$\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+.$$
Se $V \subseteq U$ sono aperti consideriamo il diagramma
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varepsilon(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "|V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varepsilon(V)"] & \mathcal{F}^+(V).
\end{tikzcd}$$
Per ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ si ha, per ogni $x \in V$,
$$(\varepsilon(U)(\sigma))_{|V}(x) = s_\sigma(x) = \sigma_x.$$

Mentre
$$\varepsilon(V)(\rho_V^U(\sigma))(x) = s_{\rho_V^U(\sigma)}(x) = (\rho_V^U(\sigma))_x = \sigma_x$$
e quindi il diagramma commuta.

Ora sia $p \in Y$ e mostriamo che $\varepsilon_p$ è biiettiva. Osserviamo intanto che, se $U$ è un aperto contenente $p$ e $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, si ha
$$\varepsilon_p(\sigma_p) = (\varepsilon(U)(\sigma))_p = (s_\sigma)_p.$$
Quindi se, per qualche $\tau \in \mathcal{F}(V)$, si ha
$$\varepsilon_p(\sigma_p) = \varepsilon_p(\tau_p)$$
allora
$$(s_\sigma)_p = (s_\tau)_p$$
e quindi esiste un aperto $W$ tale che $p \in W \subseteq U \cap V$ e
$$s_\sigma(x) = s_\tau(x) \text{ per ogni } x \in W.$$
Ma allora $\sigma_x = \tau_x$ per ogni $x \in W$ e quindi, in particolare, $\sigma_p = \tau_p$. Questo dimostra che $\varepsilon_p$ è iniettiva.

Inoltre vediamo che $\varepsilon_p$ è suriettiva per la (2).

Infatti per ogni $s_p \in (\mathcal{F}^+)_p$ si ha che $s \in \mathcal{F}^+(U)$ e quindi, per la (2), esistono un aperto $U_p$ con $p \in U_p \subseteq U$ e una sezione $\sigma \in \mathcal{F}(U_p)$ tale che $\sigma_x = s(x)$ per ogni $x \in U_p$.

Ma allora $s_\sigma(x) = \sigma_x = s(x)$ per ogni $x \in U_p$ e quindi
$$(s_\sigma)_{|U_p} = s_{|U_p}$$
da cui
$$(s_\sigma)_p = s_p.$$
Ma
$$(s_\sigma)_p = (\varepsilon(U_p)(\sigma))_p = \varepsilon_p(\sigma_p)$$
e quindi $\varepsilon_p$ è suriettiva.

Ora dimostriamo che $\mathcal{F}^+$ è un fascio.

Sia $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ un ricoprimento aperto e siano $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ tali che

(10) $\qquad (s_i)_{|W} = (s_j)_{|W}$ per ogni $i, j \in I$ e per ogni aperto $W \subseteq U_i \cap U_j$.

Sia $s : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ definita da $s(x) = s_i(x)$ se $x \in U_i$. Per (10) si ha che $s$ è ben definita.

Dato che le $s_i$ soddisfano le (1) e (2), si verifica facilmente (esercizio) che anche $s$ soddisfa (1) e (2). Quindi $s \in \mathcal{F}^+(U)$ e, proprio per come è definita, $s_{|U_i} = s_i$ e $s$ è unica. Dunque $\mathcal{F}^+$ è un fascio.

Ora mostriamo che $\varepsilon$ è un isomorfismo se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio.

Se $\varepsilon$ è un isomorfismo è facile vedere che $\mathcal{F}$ è un fascio (esercizio).

Supponiamo ora che $\mathcal{F}$ è un fascio. Dato che $\varepsilon$ è biiettivo, ne segue dalla Proposizione 2.13 che $\varepsilon(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ è biiettivo per ogni aperto $U$ di $Y$, quindi $\varepsilon$ è un isomorfismo.

In alternativa, per ogni aperto $U$ di $Y$, possiamo mostrare che

$$\varepsilon(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U) \text{ è biiettivo}$$

definendo un'inversa

$$\delta(U) : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}(U)$$

di $\varepsilon(U)$ usando la (2).

Sia $s \in \mathcal{F}^+(U)$, quindi, per la (2) per ogni $p \in U$ esistono un aperto $U_p$ con $p \in U_p \subseteq U$ e una sezione $\sigma_{U_p} \in \mathcal{F}(U_p)$ tale che

$$(\sigma_{U_p})_x = s(x) \text{ per ogni } x \in U_p. \tag{11}$$

Ora per ogni $p, q \in U$ e per ogni aperto $W \subseteq U_p \cap U_q$ e per ogni $x \in W$ si ha che

$$(\rho^{U_p}_W(\sigma_{U_p}))_x = (\sigma_{U_p})_x = s(x) = (\sigma_{U_q})_x = (\rho^{U_q}_W(\sigma_{U_q}))_x$$

Ma $\mathcal{F}$ è un fascio, quindi, per il Lemma 2.9,

$$\rho^{U_p}_W(\sigma_{U_p}) = \rho^{U_q}_W(\sigma_{U_q}).$$

Di nuovo, essendo $\mathcal{F}$ un fascio, esiste un'unica sezione $\sigma_s \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\rho^U_{U_p}(\sigma_s) = \sigma_{U_p} \text{ per ogni } p \in U. \tag{12}$$

Definiamo

$$\delta(U)(s) = \sigma_s$$

e verifichiamo che $\delta(U)$ è l'inversa di $\varepsilon(U)$. Abbiamo

$$\varepsilon(U) \circ \delta(U)(s) = \varepsilon(U)(\sigma_s) = s_{\sigma_s}$$

e facciamo vedere che

$$s_{\sigma_s} = s.$$

Per ogni $x \in U$ si ha, usando (12) e (11),

$$s_{\sigma_s}(x) = (\sigma_s)_x = (\sigma_{U_p})_x = s(x)$$

e quindi $s_{\sigma_s} = s$. Analogamente

$$\delta(U) \circ \varepsilon(U)(\sigma) = \delta(U)(s_\sigma) = \sigma_{s_\sigma}$$

e facciamo vedere che

$$\sigma_{s_\sigma} = \sigma.$$

Essendo $\mathcal{F}$ un fascio, ciò è equivalente, per il Lemma 2.9, a mostrare che, per ogni $x \in U$ si ha

$$(\sigma_{s_\sigma})_x = \sigma_x. \tag{13}$$

Ma, usando (11) e (12),

$$(\sigma_{s_\sigma})_x = s_\sigma(x) = \sigma_x$$

e quindi (13) è dimostrata ed abbiamo mostrato che $\varepsilon(U)$ è biiettivo.

Infine dimostriamo che la coppia $(\mathcal{F}^+, \varepsilon)$ è unica a meno di isomorfismo.

Sia $(\mathcal{G}, \gamma)$ una coppia con le stesse proprietà. In particolare $\mathcal{G}$ è un fascio, quindi, per quanto dimostrato prima, $\mathcal{G}$ è isomorfo a $\mathcal{G}^+$. Allora sarà sufficiente costruire un isomorfismo

$$\varphi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+ \text{ tale che } \varphi \circ \varepsilon = \gamma.$$

Per ogni aperto $U$ di $Y$ sia $s : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$. Sappiamo già che $\gamma_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è un isomorfismo, quindi possiamo definire, usando $\gamma_p$, $\varphi(U)(s)$ come la composizione

$$\varphi(U)(s) : U \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p \to \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{G}_p.$$

Si verifica facilmente (esercizio) che $\varphi(U)$ (e quindi $\varphi$) ha le proprietà volute. □

**Definizione 2.15.** Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici e sia $\mathcal{F}$ un prefascio (o fascio) su $X$. Il prefascio *immagine diretta* di $\mathcal{F}$ è il prefascio $f_*\mathcal{F}$ su $Y$ definito, per ogni aperto $U$ di $Y$, da

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

con restrizioni, per ogni aperto $V \subseteq U$,

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_V^U"] \arrow[d, equal] & f_*\mathcal{F}(V) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \arrow[r, "\rho^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}"] & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \end{tikzcd}$$

Dato che $\mathcal{F}$ è un prefascio su $X$ è immediato che anche $f_*\mathcal{F}$ lo è su $Y$.

Le seguenti osservazioni sono molto semplici e sono lasciate per esercizio.

**Osservazione 2.16.**

(i) Se $\mathcal{F}$ è un fascio su $X$, allora anche $f_*\mathcal{F}$ lo è su $Y$.

(ii) Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è morfismo di prefasci su $X$, allora è definito un morfismo

$$f_*(\varphi) : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$$

nel modo ovvio:

$$f_*(\varphi)(U) = \varphi(f^{-1}(U)).$$

(iii) $f_*$ è un funtore covariante dalla categoria dei prefasci su $X$ a quella dei prefasci su $Y$.

(iv) Se $f : X \to Y, g : Y \to Z$ sono applicazioni continue e $\mathcal{F}$ è un prefascio su $X$, allora

$$(g \circ f)_*\mathcal{F} = g_*(f_*\mathcal{F}).$$

## 3. Spazi anellati

Ci occuperemo ora di definire gli spazi anellati, avatar degli schemi.

**Definizione 3.1.** Uno *spazio anellato* è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ dove $X$ è uno spazio topologico e $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli su $X$. Se $x \in X$ denotiamo con $\mathcal{O}_{X,x}$ lo stelo di $\mathcal{O}_X$ in $x$.

Un *morfismo di spazi anellati* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\sharp)$ dove $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è un morfismo di fasci su $Y$.

Si vede facilmente che l'insieme degli spazi anellati è una categoria.

Per semplificare la notazione, dato un morfismo di spazi anellati $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ diremo semplicemente *"Sia $f : X \to Y$ un morfismo di spazi anellati"*.

Di esempi ne vedremo molti più avanti, ma, per ora, facciamone uno standard.

Sia $X$ una varietà affine su un campo $k$ e, per ogni aperto $U \subseteq X$, sia $\mathcal{O}_X(U)$ l'anello delle funzioni regolari di $X$ su $U$. Si vede facilmente che in questo modo si definisce un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ su $X$ (con restrizioni la restrizione delle funzioni) e quindi la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato. Inoltre, come è facile vedere per definizione di stelo, lo stelo di $\mathcal{O}_X$ in un punto $x$ in $X$ è nient'altro che l'anello locale di $X$ in $x$ (come definito nel corso di Geometria Algebrica 1).

Tornando alla teoria generale, vogliamo ora fare un'importante osservazione sugli steli.

**Lemma 3.2.** *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di spazi anellati. Allora, per ogni $x \in X$, $f$ induce un morfismo sugli steli*
$$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può fare o usando i limiti diretti (vedi Harshorne, cap. II, par. 2) o, più semplicemente, nel modo seguente.

Intanto $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induce un morfismo sugli steli
$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*O_X)_{f(x)}.$$
Ora ci resta da costruire un morfismo
$$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$
e poi definiremo $f_x^\sharp$ come la composizione
$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$
Il morfismo $(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ si costruisce facilmente:

sia $[\sigma] \in (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$; quindi esiste un aperto $U$ di $Y$ tale che
$$f(x) \in U \text{ e } \sigma \in f_*\mathcal{O}_X(U).$$
Ma, per definizione, $f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Quindi
$$x \in f^{-1}(U) \text{ e } \sigma \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$
La classe di $[\sigma]$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ definisce l'elemento cercato. □

In realtà, gli spazi anellati e i morfismi che interesseranno a noi, sono quelli "locali".

Ricordiamo

**Definizione 3.3.** Un *anello locale* è un anello $A$ che possiede un unico ideale massimale $m_A$. Un morfismo *locale* di anelli locali $\varphi : A \to B$ è un morfismo di anelli tale che $\varphi^{-1}(m_B) = m_A$.

**Definizione 3.4.** Uno *spazio localmente anellato* è uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ nel quale $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello locale per ogni $x \in X$. Un *morfismo di spazi localmente anellati* $f : X \to Y$ è un morfismo tale che $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è un morfismo locale per ogni $x \in X$.

## 4. Cenni di algebra omologica

Ora introdurremo (o richiameremo per chi lo ha visto già) dei cenni di algebra omologica. Questo ci permetterà di definire la coomologia di un fascio.

Da ora in poi adotteremo la seguente

**Definizione 4.1.** Un *anello* è un anello commutativo con unità. Un *morfismo di anelli* $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo tale che $\varphi(1_A) = 1_B$.

Sia $A$ un anello. Lavoreremo nella categoria $Mod(A)$ degli $A$-moduli.

Per esempio se $A = \mathbb{Z}$ allora $Mod(A)$ è la categoria dei gruppi abeliani.

**Definizione 4.2.** Un *complesso (coomologico) di $A$-moduli* è una successione di moduli e omomorfismi
$$M^\bullet : \ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\partial^{i-1}} M^i \xrightarrow{\partial^i} M^{i+1} \to \ldots$$
tali che $\partial^i \circ \partial^{i-1} = 0$ per ogni $i$ (o, equivalentemente, $\mathrm{Im}\partial^{i-1} \subseteq \mathrm{Ker}\partial^i$ per ogni $i$).

Gli omomorfismi $\partial^i$ si dicono *omomorfismi di cobordo.* Gli elementi di $\mathrm{Ker}\partial^i$ si dicono *cocicli* e gli elementi di $\mathrm{Im}\partial^i$ si dicono *cobordi.*

*L'i-esimo modulo di coomologia di $M^\bullet$* è
$$H^i(M^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\partial^i}{\mathrm{Im}\partial^{i-1}}.$$

Il complesso $M^\bullet$ si dice *esatto in grado* $i$ se $H^i(M^\bullet) = 0$ (o, equivalentemente, $\mathrm{Im}\partial^{i-1} = \mathrm{Ker}\partial^i$). $M^\bullet$ si dice *esatto (o aciclico)* se è esatto in grado $i$ per ogni $i$.

Sia $M$ un $A$-modulo. Una *risoluzione* di $M$ è un complesso

$$K^\bullet : 0 \to K^0 \to K^1 \to \cdots$$

con un omomorfismo $\epsilon : M \to K^0$ tale che

$$0 \to M \to K^0 \to K^1 \to \cdots$$

è aciclico.

Dati due complessi $M^\bullet$, $N^\bullet$, un *omomorfismo di complessi*

$$f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$$

è una successione di omomorfismi $\{f^i : M^i \to N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} M^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "f^i"'] & M^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\ N^i \arrow[r, "\partial^i"] & N^{i+1} \end{tikzcd}$$

è commutativo per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo che un omomorfismo di complessi $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ induce omomorfismi in coomologia

$$H^i(f^\bullet) : H^i(M^\bullet) \longrightarrow H^i(N^\bullet), \quad i \in \mathbb{Z}$$

definiti al modo seguente: se $m \in \mathrm{Ker}\partial^i$ sia

$$H^i(f^\bullet)(m + \mathrm{Im}\partial^{i-1}) = f^i(m) + \mathrm{Im}\partial^{i-1}$$

Si verifica facilmente che $f^i(m) \in \mathrm{Ker}\partial^i$ e che $H^i(f^\bullet)$ è ben definita.

Il risultato elementare più importante riguardante i funtori $H^i$ è il seguente

**Teorema 4.3.** *Sia*

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \longrightarrow 0$$

*una successione esatta corta di complessi, cioè tale che*

$$0 \longrightarrow L^i \xrightarrow{g^i} M^i \xrightarrow{f^i} N^i \longrightarrow 0$$

*sia una successione esatta di $A$-moduli per ogni $i$.*

*Allora sono definiti omomorfismi:*

$$\delta^i : H^i(N^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(L^\bullet), \quad i \in \mathbb{Z}$$

*tali che la successione indotta in coomologia*

$$\cdots \to H^{i-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(g^\bullet)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} \cdots$$

*è esatta.*

*Dimostrazione.* Questa è una dimostrazione piuttosto standard. Per chi non l'ha mai vista, dimostreremo solo come si definiscono i $\delta^i$. Il fatto che soddisfano le proprietà richieste è lasciato per esercizio.

Per definire $\delta^i$ consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^i \arrow[r, "g^i"] \arrow[d, "\partial^i"] & M^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "\partial^i"] & N^i \arrow[r] \arrow[d, "\partial^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L^{i+1} \arrow[r, "g^{i+1}"] & M^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] & N^{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sia $n+\mathrm{Im}\partial^{i-1} \in H^i(N^\bullet)$ in modo che $n \in \mathrm{Ker}\partial^i$. Allora, dato che $f^i$ è suriettiva, esiste $m \in M^i$ tale che $n = f^i(m)$.

Ora asseriamo che
$$\partial^i(m) \in \mathrm{Ker} f^{i+1}.$$
Infatti, per la commutatività del diagramma precedente,
$$f^{i+1}(\partial^i(m)) = \partial^i(f^i(m)) = \partial^i(n) = 0.$$
Per l'esattezza della seconda riga, a livello $i+1$, allora esiste un unico $l \in L^{i+1}$ tale che
$$\partial^i(m) = g^{i+1}(l).$$
A questo punto si definisce
$$\delta^i(n + \mathrm{Im}\partial^{i-1}) = l + \mathrm{Im}\partial^{i+1} \in H^{i+1}(L^\bullet). \quad \square$$

## 5. Categorie Abeliane

Le definizioni e i risultati che abbiamo visto nella categoria degli $A$-moduli, possono essere ottenuti allo stesso modo, in una classe più ampia di categorie, chiamate categorie abeliane, che definiamo qui di seguito.

**Definizione 5.1.** Una *categoria abeliana* è una categoria $\mathcal{A}$ tale che:

- $\mathcal{A}$ possiede un oggetto nullo
- Per ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ ha una struttura di gruppo abeliano e la legge di composizione è lineare
- Le somme dirette finite esistono
- Ogni morfismo ha un nucleo e un conucleo
- Ogni monomorfismo è il nucleo del suo conucleo, e ogni epimorfismo è il conucleo del suo nucleo
- Ogni morfismo può essere fattorizzato in un epimorfismo seguito da un monomorfismo.

Piuttosto che entrare nel dettaglio di tale definizione, ecco alcuni esempi di categorie abeliane su cui lavoreremo (alcune di queste verranno introdotte più avanti), e che si comportano come la categoria dei moduli.

- $Ab$, la categoria dei gruppi abeliani
- $Mod(A)$, la categoria dei moduli su un anello $A$
- $Ab(X)$, la categoria dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico $X$
- $Mod(X)$, la categoria dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$
- $Qcoh(X)$, la categoria dei fasci quasi-coerenti su uno schema $X$
- $Coh(X)$, la categoria dei fasci coerenti su uno schema $X$.

Tra le categorie abeliane si possono definire dei funtori con proprietà particolari, come segue.

**Definizione 5.2.** Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante tra due categorie abeliane. Diremo che $F$ è *additivo*, se l'applicazione indotta da $F$
$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$
è un omomorfismo di gruppi abeliani.

Un funtore additivo $F$ si dice *esatto* se per ogni successione esatta in $\mathcal{A}$
$$A \to B \to C$$
la successione in $\mathcal{B}$
$$F(A) \to F(B) \to F(C)$$
è esatta.

Diremo che $F$ è *esatto a sinistra* (rispettivamente *esatto a destra*) se per ogni successione esatta corta in $\mathcal{A}$
$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

la successione in $\mathcal{B}$
$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$
è esatta (rispettivamente la successione in $\mathcal{B}$
$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$
è esatta).

Si danno analoghe definizioni per funtori controvarianti.

## 6. Il funtore sezioni globali

Vediamo l'esempio principale di funtore covariante additivo, che utilizzeremo più frequentemente.

D'ora in poi adotteremo la seguente

**Notazione 6.1.** Le sezioni di un prefascio $\mathcal{F}$ su un aperto $U$, oltre che con $\mathcal{F}(U)$, si denoteranno anche con $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

Inoltre se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo, il morfismo $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ si denoterà anche con $\Gamma(U, \varphi)$.

Questo permette di definire il funtore delle sezioni globali su uno spazio topologico $X$:
$$\Gamma(X, -) : \mathit{Ab}(X) \to \mathit{Ab}$$
che associa ad ogni fascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su $X$ il gruppo abeliano delle sue sezioni globali $\mathcal{F}(X)$ e che associa ad ogni morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ il morfismo $\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$.

In altre parole, se $\mathcal{F}$ è un fascio di gruppi abeliani su $X$ definiamo
$$\Gamma(X, -)(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$
e
$$\Gamma(X, -)(\varphi) = \Gamma(X, \varphi) = \varphi(X).$$
Questo funtore ha la seguente importante proprietà

**Lemma 6.2.** *Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\Gamma(X, -) : \mathit{Ab}(X) \to \mathit{Ab}$ il funtore delle sezioni globali. Allora $\Gamma(X, -)$ è un funtore covariante additivo esatto a sinistra.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che la struttura di gruppo abeliano su $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è data da quella sugli aperti. In altre parole, se $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, definiamo $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ come
$$(\varphi + \psi)(U) = \varphi(U) + \psi(U)$$
per ogni aperto $U$ di $X$. Da questo segue banalmente che
$$\Gamma(X, -) : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G}))$$
è un omomorfismo di gruppi abeliani, in quanto, appunto,
$$\Gamma(X, \varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(X) = \varphi(X) + \psi(X) = \Gamma(X, \varphi) + \Gamma(X, \psi).$$
Ora resta da verificare che se
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$
è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su $X$ (cioè esatta sugli steli) allora
$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(X,\varphi)} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(X,\psi)} \Gamma(X, \mathcal{H})$$
è una successione esatta gruppi abeliani.

Per ipotesi abbiamo dunque che
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p \longrightarrow 0$$

è esatta per ogni $p \in X$. In particolare $\varphi_p$ è iniettiva per ogni $p \in X$, ovvero $\varphi$ è iniettiva. Dalla Proposizione 2.12(ii) segue che $\varphi(X)$ è iniettiva, ovvero che $\Gamma(X, \varphi)$ è iniettiva.

Ora mostriamo che $\mathrm{Im}(\varphi(X)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi(X))$.

Se $\sigma \in \mathrm{Im}(\varphi(X))$ allora esiste $\tau \in \mathcal{F}(X)$ tale che $\sigma = \varphi(X)(\tau)$. Ma

$$\sigma \in \mathrm{Ker}(\psi(X))$$

vuol dire che

$$\psi(X)(\sigma) = 0$$

che, per il Lemma 2.9 è equivalente a

$$(\psi(X)(\sigma))_p = 0 \text{ per ogni } p \in X.$$

Ma

$$(\psi(X)(\sigma))_p = \psi_p(\sigma_p)$$

e

$$\sigma_p = (\varphi(X)(\tau))_p = \varphi_p(\tau_p).$$

Quindi

$$(\psi(X)(\sigma))_p = 0$$

se e solo se

$$\psi_p \circ \varphi_p(\tau_p) = 0$$

e questo segue dal fatto che $\psi_p \circ \varphi_p = 0$.

Per concludere dimostriamo che $\mathrm{Ker}(\psi(X)) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi(X))$.

Sia $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ tale che $\psi(X)(\sigma) = 0$. Allora $(\psi(X)(\sigma))_p = 0$ per ogni $p \in X$ e quindi

$$\psi_p(\sigma_p) = (\psi(X)(\sigma))_p = 0$$

per ogni $p \in X$. Essendo la successione esatta sugli steli, si ha che

$$\mathrm{Ker}\psi_p = \mathrm{Im}\varphi_p$$

e quindi esiste $[\tau_{U_p}] \in \mathcal{F}_p$ tale che $\sigma_p = \varphi_p([\tau_{U_p}])$, dove $\tau_{U_p} \in \mathcal{F}(U_p)$ per un certo aperto $U_p$ contenente $p$. Ma allora

$$\sigma_p = \varphi_p([\tau_{U_p}]) = (\varphi(U_p)(\tau_{U_p}))_p$$

e quindi esiste un aperto $V_p$ tale che $p \in V_p \subseteq U_p$ e

$$\rho^X_{V_p}(\sigma) = \rho^{U_p}_{V_p}(\varphi(U_p)(\tau_{U_p})).$$

Essendo

$$\rho^{U_p}_{V_p}(\varphi(U_p)(\tau_{U_p})) = \varphi(V_p)(\rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p}))$$

deduciamo che

$$\rho^X_{V_p}(\sigma) = \varphi(V_p)(\rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p})).$$

Sia ora

$$\epsilon_{V_p} = \rho^{U_p}_{V_p}(\tau_{U_p}) \in \mathcal{F}(V_p),$$

in modo che, per quanto scritto sopra, si ha

$$\varphi(V_p)(\epsilon_{V_p}) = \rho^X_{V_p}(\sigma). \tag{14}$$

Ricordiamo che dobbiamo dimostrare che $\sigma \in \mathrm{Im}\varphi(X)$. Abbiamo conseguito sinora che su $V_p$ questo accade, dunque non ci resta che "incollare" le sezioni $\epsilon_{V_p}$ ad una sezione su tutto $X$. Consideriamo il ricoprimento aperto $X = \bigcup\limits_{p \in X} V_p$ e verifichiamo la condizione di incollamento delle $\epsilon_{V_p}$. Per $p, q \in X$ e per ogni aperto $W \subseteq V_p \cap V_q$ occorre verificare che

$$\rho^{V_p}_W(\epsilon_{V_p}) = \rho^{V_q}_W(\epsilon_{V_q}).$$

Ma sappiamo che $\varphi$ è iniettiva, quindi $\varphi(W)$ è iniettiva. Dunque ci basterà verificare che

$$\varphi(W)(\rho^{V_p}_W(\epsilon_{V_p})) = \varphi(W)(\rho^{V_q}_W(\epsilon_{V_q})). \tag{15}$$

Ora, usando la (14), il primo membro di (15), è

$$\varphi(W)(\rho^{V_p}_W(\epsilon_{V_p})) = \rho^{V_p}_W(\varphi(V_p)(\epsilon_{V_p})) = \rho^{V_p}_W(\rho^X_{V_p}(\sigma)) = \rho^X_W(\sigma)$$

e, con lo stesso calcolo,

$$\varphi(W)(\rho^{V_q}_W(\epsilon_{V_q})) = \rho^X_W(\sigma)$$

e quindi la (15) è dimostrata.

Come detto questo vuol dire che le $\epsilon_{V_p}$ si "incollano" ovvero che esiste $\epsilon \in \mathcal{F}(X)$ tale che, per ogni $p \in X$, si ha

$$\rho^X_{V_p}(\epsilon) = \epsilon_{V_p}.$$

Ora dimostriamo che

$$\varphi(X)(\epsilon) = \sigma.$$

Come sappiamo (Lemma 2.9) ci basta verificare tale uguaglianza sugli steli, quindi, usando la (14),

$$(\varphi(X)(\epsilon))_p = (\rho^X_{V_p}(\varphi(X)(\epsilon))_p = (\varphi(V_p)(\rho^X_{V_p}(\epsilon))_p = (\varphi(V_p)(\epsilon_{V_p}))_p = (\rho^X_{V_p}(\sigma))_p = \sigma_p. \qquad \square$$

## 7. Nucleo, conucleo, esattezza categorica

Nel Lemma 6.2 abbiamo di fatto "anticipato" l'esattezza di successioni esatte di fasci. Rendiamolo una definizione.

**Definizione 7.1.** Sia $X$ uno spazio topologico. Una successione di omomorfismi di fasci di gruppi abeliani

$$\mathcal{F}^\bullet : \cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \to \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1} \to \cdots$$

si dice *esatta in grado $i$ (o in $\mathcal{F}_i$)* se la successione degli steli

$$\mathcal{F}_{i-1,x} \to \mathcal{F}_{i,x} \to \mathcal{F}_{i+1,x}$$

è esatta per ogni $x \in X$.

Diremo che $\mathcal{F}^\bullet$ *è esatta* se lo è in ogni $i$. Una successione esatta della forma

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

si dirà *esatta corta*.

Come si è detto nella sezione precedente, la categoria $Ab(X)$ è abeliana, e quindi la nozione di successione esatta si sarebbe potuta dare anche in termini puramente categorici. Le due definizioni risultano essere infatti equivalenti. Per vedere tutto ciò introduciamo le nozioni di nucleo, conucleo e immagine nella categoria $Ab(X)$.

**Definizione 7.2.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo tra fasci di gruppi abeliani su $X$. Il *nucleo di $\varphi$* è il fascio $\operatorname{Ker}\varphi$ definito da

$$(\operatorname{Ker}\varphi)(U) = \operatorname{Ker}(\varphi(U)) \text{ per ogni aperto } U \text{di } X$$

con le restrizioni indotte da quelle di $\mathcal{F}$.

I prefasci *conucleo di $\varphi$ e immagine di $\varphi$* sono i prefasci $\mathrm{PCoker}\varphi$ e $\mathrm{PIm}\varphi$ definiti da

$$(\mathrm{PCoker}\varphi)(U) = \operatorname{Coker}(\varphi(U)) \text{ e } (\mathrm{PIm}\varphi)(U) = \operatorname{Im}(\varphi(U))$$

con le restrizioni indotte da quelle di $\mathcal{G}$.

I fasci *conucleo di $\varphi$ e immagine di $\varphi$* sono i fasci

$$\operatorname{Coker}\varphi = (\mathrm{PCoker}\varphi)^+ \text{ e } \operatorname{Im}\varphi = (\mathrm{PIm}\varphi)^+$$

associati ai corrispondenti prefasci.

Nel seguente lemma riassumiamo le principali proprietà categoriche corrispondenti.

**Lemma 7.3.** *Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo tra fasci di gruppi abeliani su $X$. Si ha*

(a) $\operatorname{Ker}\varphi$ *è un fascio;*
(b) *Una successione di omomorfismi di fasci*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

*è esatta in grado $i$ (o in $\mathcal{F}_i$) se e solo se lo è in senso categorico (cioè* $\operatorname{Ker}\varphi_i = \operatorname{Im}\varphi_{i-1}$*);*
(c) *C'è una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* Verificheremo solo la suriettività della mappa

$$\mathcal{G}_x \xrightarrow{\pi_x} (\operatorname{Coker}\varphi)_x$$

per ogni $x \in X$. Il resto delle verifiche sono lasciate per esercizio.

Come sappiamo la mappa

$$\varepsilon : \mathrm{PCoker}\varphi \to (\mathrm{PCoker}\varphi)^+ = \operatorname{Coker}\varphi$$

è biiettiva per il Teorema 2.14, quindi è un isomorfismo sugli steli, cioè

$$(\mathrm{PCoker}\varphi)_x \cong (\operatorname{Coker}\varphi)_x \text{ per ogni } x \in X.$$

Dunque dobbiamo verificare la suriettività della mappa

$$\mathcal{G}_x \to (\mathrm{PCoker}\varphi)_x$$

Ma questo segue banalmente dal fatto che, per ogni aperto $U$ di $X$ le mappe

$$\mathcal{G}(U) \to \operatorname{Coker}(\varphi(U))$$

sono suriettive. □

## 8. Fasci fiacchi

Introdurremo ora i fasci fiacchi. Come vedremo questi saranno molto importanti per definire la coomologia.

**Definizione 8.1.** Siano $X$ uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio su $X$. Diremo che $\mathcal{F}$ è *fiacco* se per ogni aperto $U \subseteq X$ la restrizione

$$\rho_U^X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

è suriettiva.

Vedremo più avanti esempi di fasci fiacchi.

**Osservazione 8.2.** (esercizi)
(a) Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e $\mathcal{F}$ è un fascio fiacco su $X$ allora $f_*\mathcal{F}$ è un fascio fiacco su $Y$.
(b) Se $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ è una famiglia finita di fasci fiacchi di gruppi abeliani, allora la loro somma diretta $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ è fiacco.

Per studiare il funtore sezioni nel caso di fasci fiacchi premettiamo la seguente

**Definizione 8.3.** Sia $\mathcal{F}$ un prefascio (o fascio) su uno spazio topologico $X$ e sia $U$ un aperto di $X$. La *restrizione* di $\mathcal{F}$ ad $U$ è il prefascio $\mathcal{F}_{|U}$ definito, per ogni aperto $V \subseteq U$, da

$$\mathcal{F}_{|U}(V) = \mathcal{F}(V)$$

e con le restrizioni di $\mathcal{F}$.

È facile vedere che

**Osservazione 8.4.** (esercizi)

(a) Se $\mathcal{F}$ è un fascio su $X$ allora $\mathcal{F}_{|U}$ è un fascio su $U$;
(b) $(\mathcal{F}_{|U})_p \cong \mathcal{F}_p$ per ogni $p \in U$.

Nel caso dei fasci fiacchi il funtore sezioni (anche non globali), è esatto. Infatti si ha

**Lemma 8.5.** *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*una successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani su $X$. Allora*

(a) *Se $\mathcal{F}$ è fiacco allora*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi(U)} \Gamma(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi(U)} \Gamma(U,\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

*è esatta per ogni aperto $U \subseteq X$.*

(b) *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fiacchi, allora $\mathcal{H}$ è fiacco.*

*Dimostrazione.* $(a) \Rightarrow (b)$: consideriamo $U \subseteq X$ aperto. Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi(X)"] \arrow[d, "{}^{\mathcal{G}}\rho_U^X"] & \Gamma(X,\mathcal{H}) \arrow[d, "{}^{\mathcal{H}}\rho_U^X"] \\ \Gamma(U,\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi(U)"] & \Gamma(U,\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

in cui ${}^{\mathcal{G}}\rho_U^X$ è suriettiva perché $\mathcal{G}$ è fiacco e $\psi(U)$ è suriettiva per la (a). Ne segue che $\psi(U) \circ ({}^{\mathcal{G}}\rho_U^X)$ è suriettiva. Ma

$$\psi(U) \circ ({}^{\mathcal{G}}\rho_U^X) = ({}^{\mathcal{H}}\rho_U^X) \circ \psi(X)$$

quindi anche $({}^{\mathcal{H}}\rho_U^X) \circ \psi(X)$ è suriettiva. Ma questo implica che ${}^{\mathcal{H}}\rho_U^X$ è suriettiva e quindi $\mathcal{H}$ è fiacco.

Ora passiamo a dimostrare la $(a)$. Per ipotesi sappiamo che

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$$

è esatta per ogni $x \in X$, quindi anche per ogni $x \in U$. Ma allora la successione di fasci su $U$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \xrightarrow{\varphi_{|U}} \mathcal{G}_{|U} \xrightarrow{\psi_{|U}} \mathcal{H}_{|U} \longrightarrow 0$$

è esatta. Ma, sullo spazio topologico $U$ sappiamo che, per il Lemma 6.2, il funtore $\Gamma(U,-)$ è esatto a sinistra e quindi la successione

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}_{|U}) \xrightarrow{\varphi_{|U}(U)} \Gamma(U,\mathcal{G}_{|U}) \xrightarrow{\psi_{|U}(U)} \Gamma(U,\mathcal{H}_{|U})$$

è esatta. Quindi anche

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi(U)} \Gamma(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi(U)} \Gamma(U,\mathcal{H})$$

è esatta. Dunque, per concludere la dimostrazione, ci resta da dimostrare la suriettività di $\psi(U)$.

Sia $\sigma \in \Gamma(U,\mathcal{H})$. Dato che $\psi$ è suriettiva sugli steli si ha che $\sigma_x \in \mathrm{Im}\psi_x$ e, come abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma 6.2, nella parte $\mathrm{Ker}(\psi(X)) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi(X))$, esiste un aperto $V \subseteq U$ e una sezione $\tau \in \Gamma(V,\mathcal{G})$ tale che

$$\psi(V)(\tau) = \rho_V^U(\sigma). \tag{16}$$

Tra tutti questi aperti $V$ ne definiremo uno massimale $V_0$, con la stessa proprietà (16), e dimostreremo che $V_0 = U$. Questo, per (16), implicherà che

$$\psi(U)(\tau) = \rho_U^U(\sigma) = \sigma$$

e quindi che $\psi(U)$ è suriettiva.

Intanto dimostriamo che un $V$ massimale soddisfacente la proprietà (16) esiste. Sia

$$T = \{(V, \tau) : V \subseteq U \text{ è aperto, } \tau \in \mathcal{G}(V) \text{ e } \psi(V)(\tau) = \rho_V^U(\sigma)\}$$

e consideriamo $T$ come insieme parzialmente ordinato con la relazione

$$(V, \tau) \leq (V', \tau') \text{ se e solo se } V \subseteq V' \text{ e } \rho_V^{V'}(\tau') = \tau.$$

Si verifica facilmente che questa è una relazione di ordine parziale.

Per dimostrare che esiste una coppia $(V, \tau)$ massimale, applichiamo il Lemma di Zorn a $T$. Sia $\{(V_i, \tau_i), i \in I\}$ un sottoinsieme totalmente ordinato in $T$. Sia

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Questo è un ricoprimento aperto ed abbiamo sezioni

$$\tau_i \in \mathcal{G}(V_i)$$

che si "incollano": per ogni $i, j \in I$ abbiamo infatti, senza perdita di generalità, essendo $\{(V_i, \tau_i), i \in I\}$ totalmente ordinato,

$$(V_i, \tau_i) \leq (V_j, \tau_j)$$

e quindi

$$V_i \subseteq V_j \text{ e } \rho_{V_i}^{V_j}(\tau_j) = \tau_i.$$

Ma allora, per ogni aperto $W \subseteq V_i \cap V_j$ si ha

$$\rho_W^{V_i}(\tau_i) = \rho_W^{V_i}(\rho_{V_i}^{V_j}(\tau_j)) = \rho_W^{V_j}(\tau_j)$$

e quindi le $\tau_i$ si "incollano".

Ne segue che esiste una sezione $\tau \in \mathcal{G}(V)$ tale che

$$\rho_{V_i}^V(\tau) = \tau_i \text{ per ogni } i \in I.$$

Ora dimostriamo che $(V, \tau) \in T$, ovvero che

$$\psi(V)(\tau) = \rho_V^U(\sigma).$$

Ma questa uguaglianza può essere verificata sul ricoprimento aperto. Per fare questo useremo anche che $(V_i, \tau_i) \in T$ e quindi che

$$\psi(V_i)(\tau_i) = \rho_{V_i}^U(\sigma).$$

Si ha

$$\rho_{V_i}^V(\psi(V)(\tau)) = \psi(V_i)(\rho_{V_i}^V(\tau)) = \psi(V_i)(\tau_i) = \rho_{V_i}^U(\sigma) = \rho_{V_i}^V(\rho_V^U(\sigma)).$$

Abbiamo allora verificato che $(V, \tau) \in T$ e ovviamente

$$(V_i, \tau_i) \leq (V, \tau)$$

dato che, appunto, $V_i \subseteq V$ e $\rho_{V_i}^V(\tau) = \tau_i$ per ogni $i \in I$.

Dunque la coppia $(V, \tau)$ è un maggiorante per la catena $\{(V_i, \tau_i), i \in I\}$.

Per il Lemma di Zorn esiste una coppia $(V_0, \tau_0) \in T$ massimale. Per definizione di $T$ si ha che

$$\psi(V_0)(\tau_0) = \rho_{V_0}^U(\sigma).$$

Come abbiamo detto, se $V_0 = U$ abbiamo la tesi.

Supponiamo allora $V_0 \subsetneq U$ e cerchiamo una contraddizione.

Sia $p \in U \setminus V_0$. Come prima, considerato $\sigma_p \in \mathcal{H}_p$, per la suriettività di $\psi_p$, esiste un aperto $W$ tale che $p \in W \subseteq U$ e una sezione $\tau \in \mathcal{G}(W)$ tale che

$$\psi(W)(\tau) = \rho_W^U(\sigma).$$

L'idea ora è la seguente: se avessimo che $\tau_0$ e $\tau$ coincidono su $V_0 \cap W$ allora, posto

$$V_0' = V_0 \cup W$$

potremmo considerare il ricoprimento aperto $V_0' = V_0 \cup W$ con le due sezioni $\tau_0 \in \mathcal{G}(V_0), \tau \in \mathcal{G}(W)$ che coincidono su $V_0 \cap W$. Questo ci darebbe una sezione $\tau_0' \in \mathcal{G}(V_0')$ che estende $\tau_0$. Ma allora $(V_0, \tau_0) \leq (V_0', \tau_0')$. Se dimostriamo che $(V_0', \tau_0') \in T$ questo contraddice la massimalità della coppia $(V_0, \tau_0)$ dato che $V_0 \subsetneq V_0'$.

Il problema però è che, per come è stata costruita $\tau$, non possiamo garantire che $\tau_0$ e $\tau$ coincidono su $V_0 \cap W$. Però abbiamo un pò di libertà nello scegliere $\tau$, che era stata scelta tale che

$$\tau \in \mathcal{G}(W) \text{ e } \psi(W)(\tau) = \rho^U_W(\sigma).$$

Possiamo aggiungere a $\tau$ una qualsiasi sezione in $\mathrm{Ker}\psi(W)$. Ed è questo quello che faremo.

Consideriamo la sezione

$$\eta := \rho^{V_0}_{V_0 \cap W}(\tau_0) - \rho^W_{V_0 \cap W}(\tau) \in \mathcal{G}(V_0 \cap W).$$

Intanto dimostriamo che $\eta \in \mathrm{Ker}\psi(V_0 \cap W)$.

Si ha, osservando che $(V_0, \tau_0) \in T$ e quindi che $\psi(V_0)(\tau_0) = \rho^U_{V_0}(\sigma)$,

$$\psi(V_0 \cap W)(\rho^{V_0}_{V_0 \cap W}(\tau_0)) = \rho^{V_0}_{V_0 \cap W}(\psi(V_0)(\tau_0)) = \rho^{V_0}_{V_0 \cap W}(\rho^U_{V_0}(\sigma)) = \rho^U_{V_0 \cap W}(\sigma)$$

e

$$\psi(V_0 \cap W)(\rho^W_{V_0 \cap W}(\tau)) = \rho^W_{V_0 \cap W}(\psi(W)(\tau)) = \rho^W_{V_0 \cap W}(\rho^U_W(\sigma)) = \rho^U_{V_0 \cap W}(\sigma)$$

Ma allora $\psi(V_0 \cap W)$ ha lo stesso valore sui due addendi di $\eta$ e quindi $\eta \in \mathrm{Ker}\psi(V_0 \cap W)$.

Del resto sappiamo che il funtore $\Gamma(V_0 \cap W, -)$ è esatto a sinistra, quindi

$$\mathrm{Ker}\psi(V_0 \cap W) = \mathrm{Im}\varphi(V_0 \cap W)$$

da cui deduciamo che esiste una sezione $\gamma \in \Gamma(V_0 \cap W, \mathcal{F})$ tale che

$$\eta = \varphi(V_0 \cap W)(\gamma).$$

Dato che $\mathcal{F}$ è fiacco, esiste una sezione $\overline{\gamma} \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tale che

$$\rho^U_{V_0 \cap W}(\overline{\gamma}) = \gamma.$$

Sia

$$\tau' = \tau + \varphi(W)(\rho^U_W(\overline{\gamma})).$$

Intanto, per esattezza di $\Gamma(W, -)$, abbiamo che

$$\varphi(W)(\rho^U_W(\overline{\gamma})) \in \mathrm{Ker}\psi(W)$$

e quindi $\tau'$ ha la stessa proprietà di $\tau$, cioè

$$\psi(W)(\tau') = \psi(W)(\tau) = \rho^U_W(\sigma)$$

Ora però, come volevamo, verifichiamo che $\tau_0$ e $\tau'$ coincidono su $V_0 \cap W$ (questo poi implica che coincidono su ogni aperto contenuto in $V_0 \cap W$). Si ha

$$\rho^W_{V_0 \cap W}(\varphi(W)(\rho^U_W(\overline{\gamma})) = \varphi(V_0 \cap W)(\rho^W_{V_0 \cap W}(\rho^U_W(\overline{\gamma}))) = \varphi(V_0 \cap W)(\rho^U_{V_0 \cap W}(\overline{\gamma})) = \varphi(V_0 \cap W)(\gamma) = \eta$$

e quindi

$$\rho^W_{V_0 \cap W}(\tau') = \rho^W_{V_0 \cap W}(\tau) + \rho^W_{V_0 \cap W}(\varphi(W)(\rho^U_W(\overline{\gamma}))) = \rho^W_{V_0 \cap W}(\tau) + \eta = \rho^{V_0}_{V_0 \cap W}(\tau_0)$$

per definizione di $\eta$.

Come abbiamo detto, questo ci da una sezione $\tau_0' \in \mathcal{G}(V_0')$ tale che

$$\rho^{V_0'}_{V_0}(\tau_0') = \tau_0 \text{ e } \rho^{V_0'}_W(\tau_0') = \tau'.$$

Inoltre, come detto, resta da verificare che $(V_0', \tau_0') \in T$ ovvero che

$$\psi(V_0')(\tau_0') = \rho^U_{V_0'}(\sigma). \tag{17}$$

Questo concluderà la dimostrazione.

Ora per verificare (17), abbiamo due sezioni di $\mathcal{H}(V_0')$

$$\psi(V_0')(\tau_0') \text{ e } \rho^U_{V_0'}(\sigma)$$

che dobbiamo dimostrare che coincidono e questo, per definizione di fascio, è sufficiente verificarlo su $V_0$ e $W$ dato che $V_0' = V_0 \cup W$.

Su $V_0$ abbiamo

$$\rho^{V_0'}_{V_0}(\rho^U_{V_0'}(\sigma)) = \rho^U_{V_0}(\sigma) = \psi(V_0)(\tau_0)$$

e

$$\rho^{V_0'}_{V_0}(\psi(V_0')(\tau_0')) = \psi(V_0)(\rho^{V_0'}_{V_0}(\tau_0')) = \psi(V_0)(\tau_0)$$

da cui $\rho^U_{V_0'}(\sigma)$ e $\psi(V_0')(\tau_0')$ coincidono su $V_0$.

Analogamente, su $W$

$$\rho^{V_0'}_W(\rho^U_{V_0'}(\sigma)) = \rho^U_W(\sigma)$$

e

$$\rho^{V_0'}_W(\psi(V_0')(\tau_0')) = \psi(W)(\rho^{V_0'}_W(\tau_0')) = \psi(W)(\tau_0) = \rho^U_W(\sigma)$$

dato che $(V_0, \tau_0) \in T$, da cui $\rho^U_{V_0'}(\sigma)$ e $\psi(V_0')(\tau_0')$ coincidono su $W$. Questo dimostra (17).

Per quanto detto sopra il lemma è dimostrato. □

## 9. La coomologia dei fasci

In questa lezione introdurremo la coomologia dei fasci. Come anticipato, useremo un'opportuna risoluzione. Per fare questo abbiamo bisogno di premettere un lemma ed alcune definizioni.

**Lemma 9.1.** *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci su uno spazio topologico $X$. Allora $\varphi$ induce un morfismo di fasci $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\varphi^+"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

*è commutativo.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto $U$ di $X$ sia

$$\widetilde{\varphi}_U : \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{G}_x$$

definita da

$$\bigsqcup_{x \in U} \varphi_x.$$

Ora, per ogni $s \in \mathcal{F}^+(U)$, quindi $s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ che soddisfa le proprietà (1) e (2) (vedasi Teorema 2.14) definiamo

$$\varphi^+(U)(s) = \widetilde{\varphi}_U \circ s.$$

È facile vedere che il morfismo $\varphi^+$ così definito soddisfa le proprietà richieste. □

Ora introduciamo una definizione importante.

**Definizione 9.2.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Il *fascio dei germi di sezioni discontinue* di $\mathcal{F}$ è il fascio $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ definito, per ogni aperto $U$ di $X$ da

$$\mathcal{D}(\mathcal{F})(U) = \{s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ per ogni } x \in U\}.$$

Le proprietà di tali fasci sono riassunte nelle seguenti osservazioni.

**Osservazione 9.3.**

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, con le ovvie restrizioni, è un fascio di gruppi abeliani;
(b) Esiste un morfismo canonico iniettivo $\mathcal{F} \to \mathcal{D}(\mathcal{F})$;
(c) $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è un fascio fiacco;
(d) Posto $\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}, \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(\mathcal{F})$ e, per $j \geq 0$,

$$\mathcal{D}^{j+1}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(\mathrm{Coker}[\mathcal{D}^{j-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^j(\mathcal{F})])$$

si definisce una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci fiacchi, univocamente individuata da $\mathcal{F}$,

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$$

dove

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) : 0 \to \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^2(\mathcal{F}) \to \cdots$$

**Definizione 9.4.** La risoluzione

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$$

è detta la *$\mathcal{D}$-risoluzione di $\mathcal{F}$*.

*Dimostrazione.* (dell'Oss. 9.3) La (a) è ovvia, essendo le restrizioni semplicemente le restrizioni delle applicazioni $s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Per la (b) ricordiamo che, data una sezione $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, avevamo definito, nella dimostrazione del Teorema 2.14,

$$s_\sigma : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

in modo che $s_\sigma(x) = \sigma_x$. Allora definendo l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{D}(\mathcal{F})(U)$$

con

$$\sigma \mapsto s_\sigma$$

si vede subito che si ottiene un morfismo di fasci che è iniettivo:

se $s_\sigma = 0$ allora $\sigma_x = s_\sigma(x) = 0$ per ogni $x \in U$ e quindi $\sigma = 0$.

Anche la (c) è banale: se $s \in \mathcal{D}(\mathcal{F})(U)$, ovvero

$$s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ per ogni } x \in U$$

estendiamo $s$ a una sezione $\overline{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})(X)$ ponendo

$$\overline{s}(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \notin U \\ s(x) & se\ x \in U \end{cases}$$

Ricordando che $\mathcal{F}_x$ è un gruppo abeliano e quindi che $0 \in \mathcal{F}_x$, si ha che $\overline{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})(X)$ ed ovviamente estende $s$.

La (d) è lasciata per esercizio. □

Prima di definire la coomologia premettiamo il seguente risultato, che sarà utile nel seguito.

**Lemma 9.5.** *Siano $X$ uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Allora $\varphi$ induce un morfismo di risoluzioni*

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G}).$$

*Dimostrazione.* Utilizzando l'applicazione $\widetilde{\varphi}_U$ definita nella dimostrazione del Lemma 9.1, possiamo definire, allo stesso modo, un morfismo di fasci

$$\mathcal{D}(\varphi) : \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

definito da

$$\mathcal{D}(\varphi)(U)(s) = \widetilde{\varphi}_U \circ s.$$

Si ottiene il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\mathcal{D}(\varphi)"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{D}(\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

che possiamo completare al modo seguente, ottenendo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{D}(\varphi)"] & \operatorname{Coker}\gamma_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\psi^+"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{D}(\mathcal{G}) \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma_{\mathcal{G}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $\psi^+$ è la mappa seguente: sia

$$\psi : \mathrm{PCoker}\gamma_{\mathcal{F}} \to \mathrm{PCoker}\gamma_{\mathcal{G}}$$

definita, per ogni aperto $U$, in modo ovvio:

$$\psi(U)(\sigma + \mathrm{Im}(\gamma_{\mathcal{F}}(U)) = \mathcal{D}(\varphi)(\sigma) + \mathrm{Im}(\gamma_{\mathcal{G}}(U)).$$

Per il Lemma 9.1 si ha che $\psi$ definisce una mappa

$$\psi^+ : \operatorname{Coker}\gamma_{\mathcal{F}} \to \operatorname{Coker}\gamma_{\mathcal{G}}$$

e si verifica facilmente che il diagramma sopra è commutativo.

Ora $\psi^+$ induce una mappa

$$\mathcal{D}(\psi^+) : \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{G}).$$

Iterando questa costruzione si arriva a determinare in modo unico un morfismo di risoluzioni

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G}). \quad \square$$

Le osservazioni precedenti ci consentono di definire la coomologia

**Definizione 9.6.** Sia $i \geq 0$ un intero. *L'i-esimo gruppo di coomologia di $X$ a coefficienti in $\mathcal{F}$ (o di $\mathcal{F}$)* è

$$H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})))$$

dove

$$\Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})) : 0 \to \Gamma(X, \mathcal{D}^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X; \mathcal{D}^1(\mathcal{F})) \to \cdots$$

è il complesso delle sezioni globali di $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$.

Ricordiamo infatti che il funtore $\Gamma(X, -)$ è esatto a sinistra e quindi, calcolandolo sul complesso

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) : 0 \to \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^2(\mathcal{F}) \to \cdots$$

si ottiene un nuovo complesso la cui coomologia è, per definizione, $H^i(X, \mathcal{F})$.

Iniziamo ora a studiarne le proprietà.

**Proposizione 9.7.** *Sia $X$ uno spazio topologico. Per ogni $i \geq 0$, il funtore $H^i(X, -)$ è un funtore covariante dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su $X$ alla categoria dei gruppi abeliani.*

*Dimostrazione.* Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Per il Lemma 9.5 è indotto un morfismo di risoluzioni

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G})$$

il quale, applicando il funtore $\Gamma(X, -)$, definisce un morfismo di complessi

$$\Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G}))$$

e quindi un omomorfismo

$$H^i(\varphi) : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{G})$$

in modo funtoriale. Il resto delle verifiche è lasciato per esercizio. $\square$

La prossima definizione sarà spesso utile.

**Definizione 9.8.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani su $X$. $\mathcal{F}$ si dice *aciclico* se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq 1$.

Si ha

**Proposizione 9.9.** *Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani su $X$. Allora*

(a) $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$*;*

(b) *Se $\mathcal{F}$ è fiacco allora è aciclico.*

*Dimostrazione.* (a) Consideriamo il complesso

$$0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{F})$$

e la successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{F})$$

e applichiamo il funtore $\Gamma(X, -)$, che sappiamo, per il Lemma 6.2, essere esatto a sinistra. Otteniamo il complesso

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \xrightarrow{f} \Gamma(X, \mathcal{D}^1(\mathcal{F}))$$

e la successione esatta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \xrightarrow{f} \Gamma(X, \mathcal{D}^1(\mathcal{F})) \ .$$

Deduciamo che, da un lato, per definizione di coomologia,

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} f$$

e dall'altro, per esattezza,

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f = H^0(X, \mathcal{F})$$

e la (a) è dimostrata.

(b) Supponiamo ora che $\mathcal{F}$ sia fiacco e consideriamo la sua $\mathcal{D}$-risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{f^0} \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{f^1} \cdots$$

Per esattezza possiamo spezzare tale risoluzione in una serie di successioni esatte corte, per $i \geq -1$:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f^i \longrightarrow \mathcal{D}^{i+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{f^{i+1}} \operatorname{Im} f^{i+1} \longrightarrow 0$$

(basta osservare che $\operatorname{Im} f^i = \operatorname{Ker} f^{i+1}$ e che, ovviamente $f^{i+1} : \mathcal{D}^{i+1}(\mathcal{F}) \to \operatorname{Im} f^{i+1}$ è suriettiva).

Per $i = -1$ abbiamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \operatorname{Im} f^0 \to 0$$

nella quale i primi due fasci sono fiacchi ($\mathcal{F}$ per ipotesi e $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ per l'Osservazione 9.3 (c)) e quindi anche $\operatorname{Im} f^0$ lo è per il Lemma 8.5(b).

Procedendo induttivamente e applicando lo stesso argomento alle successioni esatte:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f^i \longrightarrow \mathcal{D}^{i+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{f^{i+1}} \operatorname{Im} f^{i+1} \longrightarrow 0$$

deduciamo che i fasci $\operatorname{Im} f^i$ sono fiacchi per ogni $i \geq 0$.

Allora, per il Lemma 8.5(a), sono esatte anche le successioni delle loro sezioni globali, cioè le successioni

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{Im} f^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}^{i+1}(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{Im} f^{i+1}) \longrightarrow 0$$

sono esatte per ogni $i \geq -1$.

Ma queste successioni esatte danno luogo all'esattezza, per $i \geq 1$, del complesso

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{D}^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{D}^1(\mathcal{F})) \to \cdots$$

e questo vuol dire precisamente che $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq 1$, ovvero che $\mathcal{F}$ è aciclico. $\square$

Ora abbiamo il seguente

**Teorema 9.10.** *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico $X$.*

*Allora esistono omomorfismi di gruppi*

$$H^i(X, \mathcal{H}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0$$

*tali che si ottiene una successione esatta lunga in coomologia*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \to H^2(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

*Dimostrazione.* Gli omomorfismi tra i fasci della successione esatta inducono, per il Lemma 9.5, una successione esatta corta di complessi di fasci di $\mathcal{D}$-risoluzioni (la verifica è lasciata per esercizio)

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{D}^\bullet(\varphi)} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{D}^\bullet(\psi)} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{H}) \longrightarrow 0.$$

Ora applichiamo il funtore $\Gamma(X, -)$. Otteniamo una successione di complessi di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G})) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{H})) \longrightarrow 0.$$

Questa successione è esatta per il Lemma 8.5(a). Ora possiamo applicare il Teorema 4.3 e ottenere la successione esatta dell'enunciato. $\square$

Come vedremo ora, per calcolare la coomologia di un fascio di gruppi abeliani $\mathcal{F}$, non è necessario costruirne la risoluzione fiacca canonica, ma è sufficiente risolvere $\mathcal{F}$ con fasci aciclici.

**Proposizione 9.11.** *Siano $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Sia*

$$0 \to \mathcal{F} \to K^\bullet$$

*una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci aciclici. Allora, per ogni $i \geq 0$,*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\Gamma(X, K^\bullet)).$$

*Dimostrazione.* $i = 0$: applicando il funtore $\Gamma(X, -)$ al complesso

$$0 \to K^0 \to K^1 \to \cdots$$

si ottiene il complesso

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, K^0) \xrightarrow{f} \Gamma(X, K^1) \longrightarrow \cdots$$

e, per definizione,

$$H^0(\Gamma(X, K^\bullet)) = \mathrm{Ker}\, f.$$

Ma usando l'esattezza a sinistra (Lemma 6.2), dalla risoluzione di $\mathcal{F}$ si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, K^0) \xrightarrow{f} \Gamma(X, K^1)$$

e quindi
$$\Gamma(X,\mathcal{F}) \cong \operatorname{Ker} f.$$
Per la Proposizione 9.9(a) sappiamo che
$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$$
e quindi
$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F}) \cong \operatorname{Ker} f = H^0(\Gamma(X,K^\bullet)).$$
$i=1$: spezziamo la risoluzione di $\mathcal{F}$ in due successioni esatte
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow K^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow \cdots$$
Applicando il Teorema 9.10 alla prima deduciamo la successione esatta
$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,K^0) \to H^0(X,N) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,K^0).$$
Per ipotesi abbiamo che $H^1(X,K^0)=0$ e inoltre, come sappiamo,
$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F}), H^0(X,K^0) \cong \Gamma(X,K^0), H^0(X,N) \cong \Gamma(X,N)$$
e quindi possiamo riscrivere la successione esatta sopra come
$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,K^0) \xrightarrow{g} \Gamma(X,N) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$
Ora, per l'esattezza a sinistra di $\Gamma(X,-)$ applicato alla seconda successione, abbiamo anche la successione esatta
$$0 \longrightarrow \Gamma(X,N) \xrightarrow{h} \Gamma(X,K^1) \xrightarrow{j} \Gamma(X,K^2)$$
Ora la composizione
$$\Gamma(X,K^0) \xrightarrow{g} \Gamma(X,N) \xrightarrow{h} \Gamma(X,K^1)$$
definisce la prima mappa del complesso
$$0 \longrightarrow \Gamma(X,K^0) \xrightarrow{h\circ g} \Gamma(X,K^1) \xrightarrow{j} \Gamma(X,K^2)$$
da cui deduciamo, per definizione di coomologia, che
$$H^1(\Gamma(X,K^\bullet)) = \frac{\operatorname{Ker} j}{\operatorname{Im}(h\circ g)}.$$
Ma $h$ è iniettiva, quindi
$$\operatorname{Im}(h\circ g) \cong \operatorname{Im} g$$
e per esattezza sappiamo che
$$\operatorname{Ker} j \cong \Gamma(X,N) \text{ e } \operatorname{Coker} g \cong H^1(X,\mathcal{F})$$
da cui deduciamo che
$$H^1(\Gamma(X,K^\bullet)) = \frac{\operatorname{Ker} j}{\operatorname{Im}(h\circ g)} \cong \frac{\Gamma(X,N)}{\operatorname{Im} g} = \operatorname{Coker} g \cong H^1(X,\mathcal{F})$$
e il caso $i=1$ è dimostrato.

Ora procediamo per induzione su $i$ e supponiamo $i \geq 2$.

Dalla successione esatta
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow K^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
deduciamo la successione esatta
$$0 = H^{i-1}(X,K^0) \to H^{i-1}(X,N) \to H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,K^0) = 0$$
dove abbiamo usato l'aclicità.

Dunque deduciamo che
$$H^{i-1}(X,N) \cong H^i(X,\mathcal{F}).$$
Ora consideriamo la risoluzione di $N$:
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow \cdots$$
Per l'ipotesi induttiva applicata a $N$, otteniamo che $H^{i-1}(X,N)$ è l'$(i-1)$-esimo modulo di coomologia di
$$0 \to \Gamma(X,K^1) \to \Gamma(X,K^2) \to \cdots$$
ma questo, per definizione non è altro che $H^i(\Gamma(X,K^\bullet))$ dato che la risoluzione di $N$ inizia da $K^1$. □

## 10. Lo spettro di un anello e la topologia di Zariski

Uno dei prossimi obiettivi è l'introduzione degli schemi affini. Inizieremo dallo spettro di un anello, che descriveremo sia topologicamente che nelle sue funzioni.

Ricordiamo

**Definizione 10.1.** Un ideale $\mathfrak{p}$ di un anello $A$ si dice *primo* se $\mathfrak{p} \neq A$ e $xy \in \mathfrak{p}$ implica $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$.

**Definizione 10.2.** Sia $A$ un anello. Sia
$$X = \mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A : \mathfrak{p} \text{ è un ideale primo}\}.$$

Utilizzeremo la seguente notazione, per distinguere i punti dell'insieme $X$ dagli ideali primi di $A$

**Definizione 10.3.** Sia $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo. Il punto di $X$ corrispondente a $\mathfrak{p}$ lo denoteremo con il simbolo $[\mathfrak{p}]$. Sia $x \in X$ un punto. L'ideale primo corrispondente a $x$ lo denoteremo con il simbolo $\mathfrak{p}_x$.

Vogliamo dare una topologia all'insieme $X = \mathrm{Spec}(A)$. Come vedremo questa topologia non è altro che una generalizzazione della topologia di Zariski di una varietà affine.

**Definizione 10.4.** Sia $A$ un anello e siano $S \subseteq A$ un sottoinsieme di $A$ e $Z \subseteq X$ un sottoinsieme di $X = \mathrm{Spec}(A)$. Siano
$$V(S) = \{x \in X : S \subseteq \mathfrak{p}_x\} \subseteq X$$
e
$$I(Z) = \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z \subseteq A.$$
Sia $f \in A$ e siano
$$V(f) = V(\{f\}) = \{x \in X : f \in \mathfrak{p}_x\}$$
e
$$U_f = X \setminus V(f) = \{x \in X : f \notin \mathfrak{p}_x\}.$$

Elenchiamo di seguito le principali proprietà di tali insiemi.

**Osservazione 10.5.**
(a) $S \subseteq T \implies V(S) \supseteq V(T)$;
(b) $V(1) = \emptyset$, $V(0) = X$;
(c) $V(S) = V((S))$ per ogni $S \subseteq A$;
(d) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ per ogni $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di $A$;
(e) $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$ per ogni famiglia di ideali $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ di $A$;
(f) $V(I(Z)) = \overline{Z}$ (nella topologia definita da (b)-(e)) per ogni $Z \subseteq X$;
(g) $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $A$;
(h) $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $A$;

(i) $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ per ogni $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di $A$;
(j) $I(\{x\}) = \mathfrak{p}_x$ per ogni $x \in X$;
(k) $U_g \subseteq U_f \Leftrightarrow g \in \sqrt{(f)}$ per ogni $f, g \in A$.

**Definizione 10.6.** La topologia di Zariski di $X = \operatorname{Spec}(A)$ *è quella che ha per chiusi la famiglia degli insiemi*

$$\{V(S), S \subseteq A\}$$

ovvero, per la (c), quella che ha per chiusi la famiglia degli insiemi

$$\{V(\mathfrak{a}), \mathfrak{a} \text{ ideale di } A\}.$$

Sia $f \in A$. I chiusi $V(f)$ si dicono *chiusi principali* di $X$ e gli aperti $U_f$ si dicono *aperti principali* di $X$.

*Dimostrazione.* (dell'Osservazione 10.5).
(a) $x \in V(T) \implies T \subseteq \mathfrak{p}_x \implies S \subseteq T \subseteq \mathfrak{p}_x \implies x \in V(S)$.
(b) Se $V(1) \neq \emptyset$ allora esiste $x \in X$ tale che $1 \in \mathfrak{p}_x$. Ma allora $\mathfrak{p}_x = A$, contraddizione. Quindi $V(1) = \emptyset$. $V(0) = \{x \in X : 0 \in \mathfrak{p}_x\} = X$ dato che ogni ideale contiene 0.
(c) Sia $x \in X$. Si ha

$$x \in V(S) \iff S \subseteq \mathfrak{p}_x \iff (S) \subseteq \mathfrak{p}_x \iff x \in V((S)).$$

(d) Sia $x \in X$. Si ha

$$x \in V(\mathfrak{a}) \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x \implies \mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x \implies x \in V(\mathfrak{ab})$$

quindi $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$. Se $x \in V(\mathfrak{ab}), x \notin V(\mathfrak{b})$ allora $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}_x$ e $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_x$ quindi esiste $g \in \mathfrak{b}$ tale che $g \notin \mathfrak{p}_x$. Per ogni $f \in \mathfrak{a}$ si ha $fg \in \mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}_x$ e quindi $f \in \mathfrak{p}_x$. Ma allora $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$ e quindi $x \in V(\mathfrak{a})$. Questo dimostra che $V(\mathfrak{ab}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ e conclude la (d).
(e) Si ha

$$x \in V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \iff \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}_x \iff \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}_x \text{ per ogni } i \in I$$

$$\iff x \in V(\mathfrak{a}_i) \text{ per ogni } i \in I \iff x \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

(f) Se $x \in Z$ allora $\mathfrak{p}_x$ appare nell'intersezione che definisce $I(Z)$ e quindi

$$I(Z) = \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z \subseteq \mathfrak{p}_x,$$

da cui $Z \subseteq V(I(Z))$ e quindi $\overline{Z} \subseteq V(I(Z))$. Ora $\overline{Z}$ è chiuso, quindi esiste un ideale $\mathfrak{a}$ di $A$ tale che $\overline{Z} = V(\mathfrak{a})$. Ma $Z \subseteq \overline{Z} = V(\mathfrak{a})$, quindi per ogni $z \in Z$ si ha che $z \in V(\mathfrak{a})$, ovvero che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_z$. Ne segue che

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z = I(Z)$$

Per la (a) si ha

$$\overline{Z} = V(\mathfrak{a}) \supseteq V(I(Z))$$

e la (f) è dimostrata.
(g)

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x} \mathfrak{p}_x = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

(l'ultima uguaglianza segue da [AM, Prop. 1.14]).
(h) Osserviamo intanto che se $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}$ sono ideali, con $\mathfrak{p}$ primo allora

(18) $$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \iff \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Infatti, essendo $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ allora è ovvio che se $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$ ne segue che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Viceversa se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ e $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ allora esiste un $m \geq 1$ tale che $f^m \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Ma $\mathfrak{p}$ è primo, quindi $f \in \mathfrak{p}$. Dunque $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$. Ora, per vedere la (h), osserviamo che, essendo $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, usando la (a) si ha

$$V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}}).$$

Viceversa se $x \in V(\mathfrak{a})$ allora $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$ e quindi, per la (18) si ha che $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}_x$. Ma allora $x \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ e la (h) è dimostrata.

(i) Supponiamo che $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$. Allora per ogni $x \in V(\mathfrak{a})$ si ha che $x \in V(\mathfrak{b})$, quindi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_x$. Quindi, come visto prima,

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x} \mathfrak{p}_x = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x \supseteq \mathfrak{b}.$$

Viceversa sia $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Per ogni $x \in V(\mathfrak{a})$ si ha che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$, quindi, per la (18), si ha che $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}_x$. Ma allora $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}_x$, quindi $x \in V(\mathfrak{b})$. Pertanto $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$. Per concludere la (i) resta da dimostrare che

$$\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \iff \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Ora se $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ ovviamente ne segue che $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Viceversa sia $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Per ogni $f \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ ne segue che esiste $m \geq 1$ tale che $f^m \in \mathfrak{b}$, quindi $f^m \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Ma allora esiste $n \geq 1$ tale che $(f^m)^n \in \mathfrak{a}$, quindi $f^{mn} \in \mathfrak{a}$, da cui $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dunque $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(j)

$$I(\{x\}) = \bigcap_{z \in \{x\}} \mathfrak{p}_z = \mathfrak{p}_x.$$

(k) Se $U_g \subseteq U_f$ allora $X \setminus V(g) \subseteq X \setminus V(f)$, quindi $V(f) \subseteq V(g)$. Per la (c) ne segue che $V((f)) \subseteq V((g))$ e la (i) implica che $g \in (g) \subseteq \sqrt{(f)}$. Infine se $g \in \sqrt{(f)}$ allora, essendo $\sqrt{(f)}$ un ideale ne segue che $(g) \subseteq \sqrt{(f)}$. Applicando di nuovo la (i) e la (h) ne segue che $V((f)) = V(\sqrt{(f)}) \subseteq V((g))$ e quindi $U_g \subseteq U_f$. $\square$

Ora dimostreremo due importanti proprietà della topologia di Zariski.

**Lemma 10.7.** *Sia $A$ un anello. La famiglia di aperti $\{U_f, f \in A\}$ è una base per la topologia di Zariski di $X = \mathrm{Spec}(A)$.*

*Dimostrazione.* Sia $U$ un aperto di $X$, quindi, per definizione, esiste un ideale $\mathfrak{a}$ di $A$ tale che $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$. Sia $x \in U$, quindi $x \notin V(\mathfrak{a})$, dunque $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_x$. Allora esiste $f \in \mathfrak{a}$ tale che $f \notin \mathfrak{p}_x$. Dunque $x \in U_f$. Resta da dimostrare che $U_f \subseteq U$. Sia $y \in U_f$, quindi $f \notin \mathfrak{p}_y$. Ma allora $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ e quindi $y \notin V(\mathfrak{a})$, ovvero $y \in U$. $\square$

**Lemma 10.8.** *Sia $A$ un anello. Allora $X = \mathrm{Spec}(A)$ con la topologia di Zariski è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un ricoprimento aperto di $X$. Per il Lemma 10.7 possiamo assumere che $U_i = U_{f_i}$ per certi $f_i \in A$. Ora $U_{f_i} = X \setminus V(f_i)$, quindi

$$\bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset.$$

Per le Osservazioni 10.5 (c) ed (e) abbiamo allora che

$$V\Big(\sum_{i \in I} (f_i)\Big) = \bigcap_{i \in I} V((f_i)) = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset. \tag{19}$$

Ma se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $A$ tale che $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ne segue che $\mathfrak{a} = A$:

altrimenti, se $\mathfrak{a} \subsetneq A$, esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di $A$ tale che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ e quindi $[\mathfrak{m}] \in V(\mathfrak{a})$, contraddizione.

Dalla (19) deduciamo allora che $\sum_{i \in I} (f_i) = A$ e quindi, in particolare che

$$1 \in \sum_{i \in I} (f_i),$$

ovvero che possiamo scrivere

$$1 = a_1 f_{i_1} + \ldots + a_s f_{i_s} \text{ per certi } i_1, \ldots, i_s \in I, a_1 \ldots a_s \in A.$$

Ma questo implica che

$$V(f_{i_1}) \cap \cdots \cap V(f_{i_s}) = \emptyset$$

perché se esistesse $x \in V(f_{i_1}) \cap \cdots \cap V(f_{i_s})$ allora $f_{i_1}, \ldots, f_{i_s} \in \mathfrak{p}_x$ e quindi $1 \in \mathfrak{p}_x$, contraddizione. Ed ora

$$V(f_{i_1}) \cap \cdots \cap V(f_{i_s}) = \emptyset$$

implica che $X = U_{f_{i_1}} \cup \ldots \cup U_{f_{i_s}}$. □

Abbiamo inoltre il seguente risultato

**Proposizione 10.9.** *Sia $x \in X = \operatorname{Spec}(A)$. Allora $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$ ed è irriducibile. Inoltre ogni sottoinsieme chiuso irriducibile non vuoto di $X$ è della forma $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{[\mathfrak{p}]\}}$ per un unico ideale primo $\mathfrak{p}$ di $A$.*

*Dimostrazione.* Sia $\overline{\{x\}} = C \cup C'$ con $C, C'$ chiusi di $\overline{\{x\}}$. Dato che $x \in \overline{\{x\}}$, possiamo supporre che $x \in C$. Ma allora

$$\overline{\{x\}} \subseteq \overline{C} = C \subseteq \overline{\{x\}}$$

e quindi $C = \overline{\{x\}}$, ovvero $\overline{\{x\}}$ è irriducibile. Ora mostriamo che

$$\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x). \tag{20}$$

Si ha $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_x$, da cui $x \in V(\mathfrak{p}_x)$, quindi $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{V(\mathfrak{p}_x)} = V(\mathfrak{p}_x)$. D'altro canto $\overline{\{x\}}$ è chiuso, quindi esiste un ideale $\mathfrak{a}$ tale che $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{a})$. Allora $x \in \overline{\{x\}} = V(\mathfrak{a})$ e quindi $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$. Per l'Osservazione 10.5 (a) si ha allora che $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\mathfrak{p}_x)$ e la (20) è dimostrata. Sia ora $Z \subseteq X$ un chiuso irriducibile non vuoto. Intanto mostriamo che $I(Z)$ è primo. È ovvio che $I(Z) \neq A$. Siano $f, g \in A$ tali che $fg \in I(Z) = \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z$. Allora $fg \in \mathfrak{p}_z$ per ogni $z \in Z$, quindi, usando l'Osservazione 10.5 (d) e (c)

$$Z \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g).$$

Poiché $Z$ è irriducibile possiamo assumere che $Z \subseteq V(f)$, dunque che $f \in \mathfrak{p}_z$ per ogni $z \in Z$. Ma allora $f \in \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z = I(Z)$ e abbiamo dimostrato che $I(Z)$ è primo. Per l'Osservazione 10.5 (f) sappiamo allora che

$$Z = \overline{Z} = V(I(Z))$$

e quindi $Z$ è della forma $V(\mathfrak{p})$, con $\mathfrak{p} = I(Z)$. Ora $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{[\mathfrak{p}]\}}$ dato che se $x = [\mathfrak{p}]$ allora $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}$ e quindi l'uguaglianza $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{[\mathfrak{p}]\}}$ è la stessa prima dimostrata, cioè che $V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$.

Infine siano $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ due ideali primi tali che $Z = V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q})$. Per l'Osservazione 10.5 (i) si ha $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ e analogamente $\mathfrak{q} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, quindi $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ □.

Una conseguenza è la seguente, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Corollario 10.10.** *L'applicazione $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p}) = \overline{\{[\mathfrak{p}]\}}$ è una biezione tra $\operatorname{Spec}(A)$ e la famiglia dei sottoinsiemi chiusi irriducibili di $X$.*

**Definizione 10.11.** Sia $Z$ un chiuso irriducibile di $X$ e sia $\mathfrak{p}$ l'unico ideale primo tale che $Z = V(\mathfrak{p})$. Il punto $[\mathfrak{p}]$ si dice *punto generico* di $Z$.

Concludiamo con lo studio locale di $\operatorname{Spec}(A)$.

Ricordiamo la seguente definizione

**Definizione 10.12.** Sia $A$ un anello e sia $f \in A$. L'anello $A_f$ è la localizzazione di $A$ in $\{f^m, m \geq 0\}$. In altre parole

$$A_f = \{\frac{a}{f^m} : a \in A \text{ e } m \geq 0\}.$$

Vale il seguente

**Lemma 10.13.** *Sia $A$ un anello e sia $f \in A$. Allora c'è un omeomorfismo*
$$U_f \cong \operatorname{Spec}(A_f).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa standard della localizzazione
$$\varphi : A \to A_f$$
definita da $\varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{a}{f^0}$. Sia ora
$$\alpha : \operatorname{Spec}(A_f) \to U_f$$
definita da $\alpha(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ e sia
$$\beta : U_f \to \operatorname{Spec}(A_f)$$
definita da $\beta(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}A_f := \{\frac{a}{f^m} : a \in \mathfrak{q} \text{ e } m \geq 0\}$.

Verifichiamo che queste mappe sono ben definite e sono una l'inversa dell'altra. La verifica della loro continuità è lasciata per esercizio (la continuità di $\alpha$ segue anche dal Lemma 12.5).

Intanto è un fatto elementare che l'immagine inversa di un ideale primo tramite un omomorfismo di anelli è ancora un ideale primo. Quindi se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_f)$ si ha che $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo di $A$. Inoltre $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, altrimenti $\frac{f}{1} = \varphi(f) \in \mathfrak{p}$. Ma $\frac{f}{1}$ è invertibile in $A_f$ (con inverso $\frac{1}{f}$) e quindi $\mathfrak{p} = A_f$, contraddizione. Quindi $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, ovvero $\alpha(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in U_f$.

Il fatto che $\mathfrak{q}A_f$ è un ideale primo di $A_f$ è un fatto standard di localizzazioni, dato che $f \notin \mathfrak{q}$, essendo $\mathfrak{q} \in U_f$. Ora se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_f)$ si ha
$$\beta(\alpha(\mathfrak{p})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f$$
e vogliamo dimostrare che
$$\varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f = \mathfrak{p}. \tag{21}$$
Se $\frac{a}{f^m} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f$ allora $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, quindi $\frac{a}{1} = \varphi(a) \in \mathfrak{p}$. Ma allora $\frac{a}{f^m} = \frac{a}{1}\frac{1}{f^m} \in \mathfrak{p}$. Quindi $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f \subseteq \mathfrak{p}$. Invece se $\frac{a}{f^m} \in \mathfrak{p}$ allora $\frac{a}{1}\frac{1}{f^m} \in \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ è primo e $\frac{1}{f^m} \notin \mathfrak{p}$ (dato che è invertibile), quindi $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}$, ovvero $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ e quindi $\frac{a}{f^m} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f$. Pertanto $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_f \supseteq \mathfrak{p}$ e la (21) è dimostrata.

Infine sia $\mathfrak{q} \in U_f$, quindi $f \notin \mathfrak{q}$ e si ha
$$\alpha(\beta(\mathfrak{q})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f)$$
e vogliamo dimostrare che
$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f) = \mathfrak{q}. \tag{22}$$
Se $a \in \mathfrak{q}$ allora $\varphi(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{q}A_f$, quindi $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f)$. Ne segue che $\mathfrak{q} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f)$. Invece se $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f)$ allora $\varphi(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{q}A_f$, quindi esistono $b \in \mathfrak{q}, m \geq 0$ tali che $\frac{a}{1} = \frac{b}{f^m}$. Per definizione di localizzazione esiste un $n \geq 0$ tale che
$$f^n(af^m - b) = 0$$
e quindi $f^{n+m}a = f^n b \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{n+m} \notin \mathfrak{q}$ (perché $f \notin \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q}$ è primo) quindi $a \in \mathfrak{q}$. Ma allora $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}A_f) \subseteq \mathfrak{q}$ e la (22) è dimostrata. □

## 11. Il fascio strutturale sullo spettro e i suoi steli

Il prossimo obiettivo è dotare lo spettro di un anello di una struttura di spazio localmente anellato. Ne descriviamo pertanto il fascio strutturale.

Per fare questo utilizzeremo la base degli aperti principali e la Proposizione 2.6.

**Definizione 11.1.** Sia $A$ un anello e sia $X = \operatorname{Spec}(A)$. Per ogni aperto principale $U_f$, $f \in A$, poniamo
$$\Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f.$$

Ora, per definire un prefascio occorre definire le restrizioni.

Ricordiamo che, per l'Osservazione 10.5(k), se $U_g \subseteq U_f$, allora $g \in \sqrt{(f)}$ e quindi $g^m = bf$ per qualche $m \geq 1$ e $b \in A$. Allora possiamo definire

$$\rho_g^f := \rho_{U_g}^{U_f} : A_f \longrightarrow A_g, \quad \frac{a}{f^n} \longmapsto \frac{ab^n}{g^{nm}}$$

Lasciamo per esercizio la verifica che questa definizione non dipende dalla scelta di $b$ ed $m$ e verifichiamo invece che in questo modo si definisce un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ sulla base $\mathcal{B} = \{U_f, f \in A\}$.

**Lemma 11.2.** *Sia $A$ un anello e sia $X = \operatorname{Spec}(A)$. Allora, con le definizioni sopra, si ottiene un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ su $X$.*

*Dimostrazione.* Iniziamo a dimostrare che $\mathcal{O}_X$ è un prefascio. Si ha

$$\rho_f^f = \mathrm{id}_{A_f}$$

in quanto $g = f$ e $g^1 = 1f$ e quindi possiamo prendere $m = 1$ e $b = 1$. Ne segue che

$$\rho_f^f(\frac{a}{f^n}) = \frac{a1^n}{f^n} = \frac{a}{f^n}.$$

Se $U_g \subseteq U_f \subseteq U_h$ dobbiamo verificare che si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A_h \arrow[rr, "\rho_f^h"] \arrow[dr, "\rho_g^h"'] & & A_f \arrow[dl, "\rho_g^f"] \\ & A_g & \end{tikzcd} .$$

E infatti sia $g^m = bf$ e $f^s = ch$, da cui deduciamo che $g^{ms} = b^s f^s = (b^s c)h$ e quindi

$$\rho_g^f(\rho_f^h(\frac{a}{h^n})) = \rho_g^f(\frac{ac^n}{f^{ns}}) = \frac{ac^n b^{ns}}{g^{nsm}} = \frac{a(b^s c)^n}{g^{nsm}} = \rho_g^h(\frac{a}{h^n}).$$

Ora per vedere che $\mathcal{O}_X$ è un fascio su $X$, ci basterà verificarlo sulla base $\mathcal{B}$, e poi estendere a tutti gli aperti di $X$ usando la Proposizione 2.6.

Intanto osserviamo che $U_f \cap U_g = U_{fg}$ in quanto un ideale primo non contiene $fg$ se e solo se non contiene né $f$ né $g$. In particolare $U_{f^n} = U_f$ per ogni $n \geq 1$.

Consideriamo un ricoprimento

$$U_f = \bigcup_{i \in I} U_{f_i}.$$

Dobbiamo dimostrare le seguenti affermazioni:

(a) Se $s \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f$ soddisfa $\rho_{f_i}^f(s) = 0$ per ogni $i \in I$ allora $s = 0$ (per l'unicità).

(b) Se $s_i \in \Gamma(U_{f_i}, \mathcal{O}_X) = A_{f_i}$ soddisfa $\rho_{f_i f_j}^{f_i}(s_i) = \rho_{f_i f_j}^{f_j}(s_j)$ allora esiste $s \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f$ tale che $\rho_{f_i}^f(s) = s_i$ per ogni $i \in I$ (per l'esistenza).

Per verificare (a) e (b) usiamo i risultati precedenti per ridurre al caso $f = 1, U_f = X, A_f = A$.

Intanto sappiamo per il Lemma 10.13 che $U_f \cong \operatorname{Spec}(A_f)$ e per il Lemma 10.8 sappiamo che $U_f$ è compatto, quindi possiamo supporre che $I$ sia finito. Ora è facile vedere che, nell'isomorfismo $\beta : U_f \to \operatorname{Spec}(A_f)$, si ha che gli aperti $U_{f_i}$ di $\operatorname{Spec}(A)$ vengono mandati negli aperti $U_{\frac{f_i}{1}}$ di $\operatorname{Spec}(A_f)$ e quindi possiamo sostituire $A_f$ con $A$ e dunque supporre $f = 1$ e $U_f = X$.

Sia $n \geq 1$. Abbiamo $X = \bigcup_{i \in I} U_{f_i} = \bigcup_{i \in I} U_{f_i^n}$ che è equivalente a $\bigcap_{i \in I} V(f_i^n) = \emptyset$ e, come visto nella dimostrazione del Lemma 10.8, ciò equivale a

$$(f_i^n : i \in I) = (1) = A.$$

Quindi, per ogni $n \geq 1$, esistono $a_i \in A$ tali che

$$\sum_{i \in I} a_i f_i^n = 1. \tag{23}$$

Ora mostriamo la (a). Sia $s \in A$ tale che $\rho^1_{f_i}(s) = 0 \in A_{f_i}$ per ogni $i \in I$. Si ha $f_i^1 = b1$ dove $b = f_i$ e quindi, in $A_{f_i}$

$$\frac{0}{1} = \rho^1_{f_i}(s) = \rho^1_{f_i}(\frac{s}{1^0}) = \frac{sf_i^0}{f_i^0} = \frac{s}{1}$$

e quindi esiste un $n_i \geq 0$ tale $f_i^{n_i}s = 0$. Ma allora $f_i^n s = 0$ per ogni $n \geq n_i$. Preso $n = \max\{n_i, i \in I\}$, che esiste perché $I$ è finito, abbiamo che $f_i^n s = 0$ per ogni $i \in I$. Ma allora, usando la (23),

$$s = 1s = (\sum_{i \in I} a_i f_i^n)s = \sum_{i \in I} a_i(f_i^n s) = 0$$

e la (a) è dimostrata.

Passiamo alla (b). Abbiamo $s_i \in A_{f_i}$ tali che $\rho^{f_i}_{f_if_j}(s_i) = \rho^{f_j}_{f_if_j}(s_j)$.

Si ha $s_i = \frac{b_i}{f_i^{m_i}} = \frac{b_i f_i^{m-m_i}}{f_i^m}$ per ogni $m \geq m_i$ e quindi preso $m = \max\{m_i, i \in I\}$ e posto $c_i = b_i f_i^{m-m_i}$ possiamo scrivere

$$s_i = \frac{c_i}{f_i^m} \text{ per ogni } i \in I.$$

Consideriamo l'inclusione $U_{f_if_j} \subseteq U_{f_i}$. Si ha $(f_if_j)^1 = bf_i$ con $b = f_j$ e quindi

$$\rho^{f_i}_{f_if_j}(s_i) = \rho^{f_i}_{f_if_j}\left(\frac{c_i}{f_i^m}\right) = \frac{c_i f_j^m}{(f_if_j)^m}.$$

Per ipotesi

$$\rho^{f_i}_{f_if_j}\left(\frac{c_i}{f_i^m}\right) = \rho^{f_j}_{f_if_j}\left(\frac{c_j}{f_j^m}\right) \quad \forall i, j \in I$$

ovvero

$$\frac{c_i f_j^m}{(f_if_j)^m} = \frac{c_j f_i^m}{(f_if_j)^m}$$

Ciò significa che esiste un $l \geq 0$ (che, per la finitezza di $I$, può essere scelto indipendente da $i, j$) tale che

$$(f_if_j)^l(c_i f_j^m (f_if_j)^m - c_j f_i^m (f_if_j)^m) = 0$$

ovvero

$$(f_if_j)^{l+m}(c_i f_j^m - c_j f_i^m) = 0$$

che, posto $r = l + m$, possiamo riscrivere come

$$f_j^{r+m}(f_i^r c_i) = f_i^{r+m}(f_j^r c_j). \tag{24}$$

Sia

$$s = \sum_{i \in I} a_i f_i^r c_i,$$

dove gli $a_i$ sono scelti in modo che vale la (23) con $n = r + m$, cioè $\sum_{i \in I} a_i f_i^{r+m} = 1$. Abbiamo, usando la (24), per ogni $j \in I$

$$f_j^{r+m}s = \sum_{i \in I} a_i f_j^{r+m} f_i^r c_i = \sum_{i \in I} a_i f_i^{r+m} f_j^r c_j = f_j^r c_j \sum_{i \in I} a_i f_i^{r+m} = f_j^r c_j$$

e quindi, come abbiamo visto prima, in $A_{f_j}$ si ha

$$\rho^1_{f_j}(s) = \frac{s}{1} = \frac{sf_j^{r+m}}{f_j^{r+m}} = \frac{f_j^r c_j}{f_j^{r+m}} = \frac{c_j}{f_j^m} = s_j. \qquad \square$$

Una osservazione che sarà utile in seguito è che, nella coppia $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, l'anello delle sezioni globali non è altro che l'anello stesso: infatti essendo $X = U_1$, si ha

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) = A_1 = A.$$

Ora vogliamo dimostrare che la coppia $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ è uno spazio localmente anellato.

Premettiamo prima la seguente

**Definizione 11.3.** Sia $A$ un anello e $\mathfrak{p}$ un suo ideale primo. Si denota con $A_\mathfrak{p}$, detta *localizzazione di $A$ in $\mathfrak{p}$*, la localizzazione di $A$ rispetto alla parte moltiplicativa $S = A \setminus \mathfrak{p}$. In altre parole

$$A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s}, a \in A, s \in A \setminus \mathfrak{p}\}.$$

Come è facile verificare $A_\mathfrak{p}$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}\}$.

Si ha

**Proposizione 11.4.** *Sia $A$ un anello, sia $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$ e sia $\mathfrak{p}_x$ l'ideale primo corrispondente. Allora*

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{p}_x}.$$

*In particolare $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ è uno spazio localmente anellato.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che $A_{\mathfrak{p}_x}$ è un anello locale, dunque ci resta da dimostrare l'isomorfismo.

Sappiamo dal Lemma 10.7 che la famiglia $\{U_f, f \in A\}$ è una base e quindi un elemento di $\mathcal{O}_{X,x}$ lo possiamo vedere come

$$[\sigma], \sigma \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f$$

dove $U_f$ è un aperto contenente $x$, ovvero $f \notin \mathfrak{p}_x$. Quindi un elemento di $\mathcal{O}_{X,x}$ è $[\sigma]$ dove

$$\sigma = \frac{a}{f^n}, \quad \text{con } a \in A, n \geq 0 \text{ per un certo } f \notin \mathfrak{p}_x.$$

Ma allora $f \in A \setminus \mathfrak{p}_x$ e quindi possiamo vedere $\sigma = \frac{a}{f^n}$, oltre che come un elemento di $A_f$, anche come un elemento di $A_{\mathfrak{p}_x}$ e questo ci permette di definire un omomorfismo di anelli

$$\varphi : \mathcal{O}_{X,x} \to A_{\mathfrak{p}_x}$$

appunto definito da

$$\varphi([\sigma]) = \frac{a}{f^n}.$$

Verifichiamo che $\varphi$ è ben definita. Abbiamo due scelte, quella dei rappresentanti delle classi $[\sigma] \in \mathcal{O}_{X,x}$ e di $\frac{a}{f^n} \in A_f$. Iniziamo dalla seconda. Supponiamo quindi che

$$\sigma = \frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \in A_f$$

quindi esiste $s \geq 0$ tale che

$$f^s(af^m - bf^n) = 0.$$

Ma $f^s \notin \mathfrak{p}_x$, quindi l'uguaglianza $f^s(af^m - bf^n) = 0$ implica anche che $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \in A_{\mathfrak{p}_x}$, ovvero che $\varphi$ è ben definita rispetto alla scelta del quoziente che rappresenta $\sigma$.

Ora sia $[\sigma] = [\tau] \in \mathcal{O}_{X,x}$ dove $\sigma \in A_f, \tau \in A_g$ per qualche $f \notin \mathfrak{p}_x, g \notin \mathfrak{p}_x$. Abbiamo

$$\sigma = \frac{a}{f^n}, \tau = \frac{b}{g^m}$$

e per ipotesi $[\sigma]=[\tau]$, quindi esiste un aperto $W$ tale che $x\in W\subseteq U_f\cap U_g$ tale che
$$\rho^{U_f}_W(\sigma)=\rho^{U_g}_W(\tau).$$
Sia $h\in A$ tale che $x\in U_h\subseteq W$. Allora
$$\rho^f_h(\sigma)=\rho^g_h(\tau). \tag{25}$$
Inoltre $U_h\subseteq W\subseteq U_f\cap U_g$ quindi, per l'Osservazione 10.5(k), $h\in\sqrt{(f)}\cap\sqrt{(g)}$ ovvero si ha $h^l=cf, h^t=dg$ per certi $l,t\geq 1$ e $c,d\in A$. Pertanto
$$\rho^f_h(\sigma)=\rho^f_h(\frac{a}{f^n})=\frac{ac^n}{h^{nl}} \text{ e } \rho^f_h(\tau)=\rho^g_h(\frac{b}{g^m})=\frac{bd^m}{h^{nt}}$$
e quindi la condizione (25) diventa
$$\frac{ac^n}{h^{nl}}=\frac{bd^m}{h^{mt}}\in A_h$$
ovvero esiste $s\geq 0$ tale che
$$h^s(ac^nh^{mt}-bd^mh^{nl})=0. \tag{26}$$
Ora ricordiamo che dobbiamo dimostrare che la definizione di $\varphi$ su $[\sigma]$ e su $[\tau]$ è la stessa, ovvero che
$$\frac{a}{f^n}=\frac{b}{g^m}\in A_{\mathfrak{p}_x}.$$
Ma $h\notin\mathfrak{p}_x$ e $h^l=cf, h^t=dg$, quindi $c,d\notin\mathfrak{p}_x$. Ne segue che, in $A_{\mathfrak{p}_x}$
$$\frac{a}{f^n}=\frac{ac^n}{(cf)^n}=\frac{ac^n}{h^{nl}} \text{ e } \frac{b}{g^m}=\frac{bd^m}{(gd)^m}=\frac{bd^m}{h^{mt}}.$$
e la condizione (26) mostra esattamente che
$$\frac{a}{f^n}=\frac{ac^n}{h^{nl}}=\frac{bd^m}{h^{mt}}=\frac{b}{g^m}\in A_{\mathfrak{p}_x}.$$
Dunque $\varphi$ è ben definita.

È ovvio che $\varphi$ è un omomorfismo di anelli. Andiamo a verificare che è biiettiva.

Sia $\frac{a}{g}\in A_{\mathfrak{p}_x}$, dunque $a\in A, g\in A\setminus\mathfrak{p}_x$. Ma allora $x\in U_g$ e quindi possiamo considerare anche la sezione
$$\sigma:=\frac{a}{g}\in A_g=\Gamma(U_g,\mathcal{O}_X).$$
Per definizione di $\varphi$ si ha $\varphi([\sigma])=\frac{a}{g}$ e quindi $\varphi$ è suriettiva. Sia ora $\sigma=\frac{a}{f^n}\in A_f=\Gamma(U_f,\mathcal{O}_X)$ tale che $\varphi([\sigma])=0$, ovvero
$$\frac{a}{f^n}=0\in A_{\mathfrak{p}_x}.$$
Questo vuol dire che esiste $h\in A\setminus\mathfrak{p}_x$ tale che $ha=0$. Dato che $x\in U_h$, sarà sufficiente dimostrare che
$$\rho^f_{fh}(\sigma)=0. \tag{27}$$
Questo ovviamente darà l'iniettività di $\varphi$ dato che si avrà
$$[\sigma]=[\rho^f_{fh}(\sigma)]=0.$$
Ma $(fh)^1=hf$ e quindi
$$\rho^f_{fh}(\sigma)=\rho^f_{fh}(\frac{a}{f^n})=\frac{ah^n}{(fh)^n}=\frac{ah^nfh}{(fh)^{n+1}}=0$$
dato che $ha=0$. Questo dimostra la (27). Dunque anche l'iniettività di $\varphi$ è dimostrata. □

Vediamo ora degli esempi (le verifiche sono lasciate per esercizio).

(1) Sia $k$ un campo, sia $n \geq 1$ e sia $A = k[X_1, \dots, X_n]$. La coppia

$$\mathbb{A}_k^n := (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$$

si dice l'*$n$-spazio affine su $k$*.

(2) Sia $A$ un dominio. Allora $X = \operatorname{Spec}(A)$ è irriducibile, l'ideale nullo $(0)$ è un ideale primo e il punto associato $\eta := [(0)] \in X$ è il punto generico di $X$.

Infatti è chiaro che $(0)$ è un ideale primo dato che $A$ è un dominio. Ora, per la Proposizione 10.9 sappiamo che

$$\overline{\{\eta\}} = V((0)) = \{[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec}(A) : (0) \subseteq \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}(A) = X$$

quindi $X$ è irriducibile e $\eta$ è il punto generico di $X$.

Osserviamo inoltre che, se $Q(A)$ è il campo dei quozienti di $A$, allora tutti gli $A_f$ sono contenuti in $Q(A)$ così come tutti gli anelli locali $\mathcal{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{p}_x}$. In particolare $\mathcal{O}_{X,\eta} \cong A_{(0)} = Q(A)$.

(3) Sia $A$ un dominio a ideali principali. I punti di $X = \operatorname{Spec}(A)$ sono $\eta$, il punto generico, e gli ideali primi non nulli, che sono tutti principali. I chiusi sono tutti della forma $V(f)$ e quindi tutti gli aperti sono principali. In questo caso rientra la *retta affine su $k$*, cioè $\mathbb{A}_k^1 := \operatorname{Spec}(k[X])$, dove $k$ è un campo. Un altro esempio è $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

(4) Sia $A$ un dominio di valutazione discreta. Allora, come è noto, $A$ ha solo due ideali primi e

$$X = \operatorname{Spec}(A) = \{\eta, [\mathfrak{m}]\}$$

dove $\mathfrak{m} \subset A$ è l'ideale massimale e l'unico punto chiuso di $X$.

(5) Sia $k$ un campo e sia $A = k[t]/(t^n)$, dove $n \geq 2$. Allora $X = \operatorname{Spec}(A)$ consiste di un solo punto $(\bar{t})$. Osserviamo anche che l'anello $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ contiene l'elemento $\bar{t}$ che non è nullo, ma che si annulla nell'unico punto di $X$ (nel senso che appartiene all'ideale primo corrispondente).

## 12. Schemi

In questa sezione daremo quella che è forse la più importante definizione del corso, quella di schema. L'idea è che uno schema è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ che localmente è del tipo $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$.

Premettiamo quindi la seguente

**Definizione 12.1.** Sia $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati. Diremo che $(f, f^\sharp)$ è un *isomorfismo* se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è un isomorfismo.

Questo ci permette di definire uno schema affine.

**Definizione 12.2.** Uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice uno *schema affine* se esiste un anello $A$ tale che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia isomorfo, come spazio localmente anellato, a $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$.

Come vedremo ora, la categoria degli schemi affini non è altro che quella degli anelli.

Prima ricordiamo la

**Definizione 12.3.** Due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ si dicono *equivalenti* se esistono due funtori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tali che $F \circ G \cong \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \cong \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$.

**Teorema 12.4.** *La categoria* Aff *degli schemi affini è equivalente ad* $\mathrm{An}^\circ$*, l'opposta della categoria degli anelli (dove l'opposta di una categoria è la categoria con le frecce rovesciate).*

Premettiamo il seguente

**Lemma 12.5.** *Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora l'applicazione*

$$^a\varphi : \operatorname{Spec}(B) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A), \quad [\mathfrak{p}] \longmapsto [\varphi^{-1}(\mathfrak{p})]$$

*è continua.*

*Dimostrazione.* Per il Lemma 10.7 la famiglia $\{U_f, f \in A\}$ è una base per la topologia di Zariski di $\operatorname{Spec}(A)$. Quindi ci basta verificare che $({}^a\varphi)^{-1}(U_f)$ è aperto in $\operatorname{Spec}(B)$ per ogni $f \in A$. Ma

$$({}^a\varphi)^{-1}(U_f) = \{y \in \operatorname{Spec}(B) : \ {}^a\varphi(y) \in U_f\} =$$
$$= \{y \in \operatorname{Spec}(B) : [\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_y)] \in U_f\} = \{y \in \operatorname{Spec}(B) : f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_y)\} =$$
$$= \{y \in \operatorname{Spec}(B) : \varphi(f) \notin \mathfrak{p}_y\} = U_{\varphi(f)}$$

e quindi è aperto. □

Ora passiamo alla dimostrazione del Teorema 12.4.

*Dimostrazione.* Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli ed associamogli un morfismo di spazi anellati

$$(f, f^\sharp) : (\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) \longrightarrow (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}).$$

Poniamo $f = {}^a\varphi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ e definiamo

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}$$

nel modo seguente. Sia $U_g \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ un aperto principale. Quindi, come visto nella dimostrazione del Lemma 12.5,

$$f^{-1}(U_g) = ({}^a\varphi)^{-1}(U_g) = U_{\varphi(g)}$$

da cui

$$f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}(U_g) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}(U_{\varphi(g)}) = B_{\varphi(g)}$$

Ora definiamo

$$f^\sharp(U_g) : A_g = \Gamma(U_g, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}) \to \Gamma(U_g, f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) = B_{\varphi(g)}$$

come l'omomorfismo naturale indotto da $\varphi : A \to B$:

$$f^\sharp(U_g)(\frac{a}{g^n}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n}.$$

È facile vedere che questo omomorfismo è ben definito e che commuta con le restrizioni (esercizio). In modo naturale possiamo estenderlo ad un omomorfismo su tutti gli aperti $U$ di $\operatorname{Spec}(A)$ usando la base degli aperti principali ed il fatto che una sezione su $U$ è individuata da sezioni sugli aperti principali.

Viceversa, dato un morfismo di schemi affini

$$(f, f^\sharp) : (\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) \longrightarrow (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$$

osserviamo che

$$\Gamma(\operatorname{Spec}(A), f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) = \Gamma(f^{-1}(\operatorname{Spec}(A)), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) = \Gamma(\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) = B$$

e quindi viene indotto un omomorfismo di anelli

$$\varphi := f^\sharp(\operatorname{Spec}(A)) : A = \Gamma(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}) \to \Gamma(\operatorname{Spec}(A), f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) = B$$

È facile verificare che il morfismo di spazi anellati $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ indotto da $\varphi$ è proprio $f$. La verifica è lasciata per esercizio (nel quale si usa che $f_x^\sharp$ è locale). □

Ora possiamo dare la definizione di schema.

**Definizione 12.6.** Uno *schema* è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ che possiede un ricoprimento con aperti $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che $(U_i, (\mathcal{O}_X)_{|U_i})$ sia uno schema affine per ogni $i \in I$ (questi aperti si dicono *aperti affini di* $X$). Un *morfismo di schemi* è un morfismo dei corrispondenti spazi localmente anellati. Come nel caso degli spazi anellati diremo *"Sia $X$ uno schema"* o *"Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi"* intendendo sempre che in entrambi i casi si tratta di coppie. Se $f : X \to Y$ è un morfismo di schemi, diremo che $X$ è un $Y$*-schema*, oppure uno schema su $Y$. Se $Y = \operatorname{Spec}(A)$, diremo che $X$ è un $A$-schema.

Osserviamo che gli schemi costituiscono una categoria, che denotiamo con $Sch$.

Esempi di schemi sono i seguenti. Gli schemi affini; ogni aperto $U$ di uno schema affine $X$, dotato del fascio $(\mathcal{O}_X)_{|U}$, è uno schema perché $U$ può essere ricoperto con aperti principali di $X$, che sono schemi affini. In generale un tale schema $U$ non è affine.

Vedremo più avanti esempi espliciti di schemi non affini (per esempio gli spazi proiettivi).

Per ora ci occupiamo invece di chiarire la relazione tra le varietà algebriche, così come definite nel corso di Geometria Algebrica 1 e gli schemi.

**Definizione 12.7.** Sia $A$ un anello. Un elemento $x \in A$ si dice *nilpotente* se $x \neq 0$ e esiste $n \geq 2$ tale che $x^n = 0$. $A$ si dice *ridotto* se non ha elementi nilpotenti. Uno schema $X$ si dice *ridotto* se $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è un anello ridotto per ogni aperto $U \subseteq X$. Uno schema $X$ si dice *irriducibile* se lo è come spazio topologico.

Per quanto riguarda gli irriducibili, come visto nel caso degli schemi affini, abbiamo un analogo per gli schemi.

**Proposizione 12.8.** *Sia $X$ uno schema e sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto, chiuso e irriducibile. Allora esiste un unico $\eta_Z \in Z$ tale che $Z = \overline{\{\eta_Z\}}$ ($\eta_Z$ si dice il punto generico di $Z$).*

*Dimostrazione.* Per definizione di schema possiamo trovare un aperto affine $U$ di $X$ tale che $Z \cap U \neq \emptyset$. Essendo $Z$ irriducibile ne segue che $Z \cap U$ è irriducibile e denso in $Z$. Ora $U \cong \mathrm{Spec}(A)$ per qualche anello $A$ e quindi, usando la proposizione corrispondente su $\mathrm{Spec}(A)$ (Proposizione 10.9) esiste un unico $\eta_Z \in Z \cap U$ tale che

$$Z \cap U = \overline{\{\eta_Z\}}^U.$$

Quindi

$$Z \cap U = \overline{\{\eta_Z\}}^U = \overline{\{\eta_Z\}}^X \cap U \subseteq \overline{\{\eta_Z\}}^X$$

da cui

$$\overline{\{\eta_Z\}}^X \subseteq Z = \overline{Z \cap U}^X \subseteq \overline{\{\eta_Z\}}^X$$

e quindi $Z = \overline{\{\eta_Z\}}$. Inoltre $\eta_Z$ è unico: se $z \in Z$ è tale che $Z = \overline{\{z\}}$ allora $z \in U$: se $z \in Z \setminus U$ allora $Z = \overline{\{z\}} \subseteq Z \setminus U \subsetneq Z$, contraddizione.

Ma allora

$$Z \cap U = \overline{\{z\}}^X \cap U = \overline{\{z\}}^U$$

e quindi $z = \eta_Z$ per l'unicità in $U \cong \mathrm{Spec}(A)$ (sempre per la Proposizione 10.9). $\square$

Ora torniamo alle varietà del corso di Geometria Algebrica 1. Premettiamo la seguente

**Definizione 12.9.** Sia $k$ un campo e sia $X$ un $k$-schema. $X$ si dice *di tipo finito su $k$* se $X$ possiede un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i \in I}$ con aperti affini $U_i \cong \mathrm{Spec}(A_i)$ tali che ogni $A_i$ è una $k$-algebra di tipo finito (ovvero finitamente generata). Una *$k$-prevarietà* è un sottoinsieme aperto di un chiuso irriducibile nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^r_k$ (per qualche $r$).

Quindi una $k$-prevarietà è una varietà quasi-proiettiva irriducibile, così come definito nel corso di Geometria Algebrica 1. Come anticipato, su una $k$-prevarietà $X$ può essere definito il fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ delle funzioni regolari. È ovvio osservare che, per ogni aperto $U$ di $X$, si ha che

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f \in k(X) : f \text{ è regolare in ogni punto di } U\}$$

è un anello ridotto.

Ad una $k$-prevarietà $X$ possiamo associare un $k$-schema $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ nel modo seguente.

Ad ogni sottoinsieme chiuso irriducibile di dimensione positiva $W \subseteq X$ associamo un simbolo $[W]$ e definiamo $\mathcal{X}$ come l'unione di $X$ con tutti questi simboli. In altre parole

$$\mathcal{X} = \{x, [W] : x \in X \text{ e } W \subseteq X \text{ è chiuso irriducibile con} \dim W > 0\}.$$

Diamo poi la seguente topologia su $\mathcal{X}$. Per ogni aperto $U \subseteq X$ sia

$$U^* = \{x, [W] : x \in U, [W] \in \mathcal{X} \text{ e } U \cap W \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Si verificano facilmente le seguenti:

(a) $(\bigcup_\alpha U_\alpha)^* = \bigcup_\alpha U_\alpha^*$.
(b) $(U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*$.
(c) $U^* \cap X = U$.

Quindi $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} = \{U^*, U \text{ aperto di } X\}$ è una topologia su $\mathcal{X}$ che per restrizione induce la topologia di Zariski $\mathcal{T}_X$ su $X$. Inoltre, per la (c), la corrispondenza

$$U \mapsto U^*$$

è una biezione tra $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$.

Ora definiamo un fascio di anelli $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ su $\mathcal{X}$ ponendo per ogni aperto $U \subseteq X$

$$\Gamma(U^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Si ha

**Lemma 12.10.** *Sia $k$ algebricamente chiuso e sia $X$ una $k$-prevarietà. Allora $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ è un $k$-schema ridotto, irriducibile e di tipo finito.*

*Dimostrazione.* Intanto $\mathcal{X}$ è irriducibile: se $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ con $\mathcal{X}_i$ chiusi di $\mathcal{X}$, $i = 1, 2$ allora esistono aperti $U_i$ di $X$ tali che $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \setminus U_i^*$. Essendo $X$ irriducibile si ha, senza perdita di generalità, che $X \subseteq \mathcal{X}_1$. Ora se $U_1 = \emptyset$ allora $U_1^* = \emptyset$ e quindi $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$. Se $U_1 \neq \emptyset$, sia $x \in U_1 \subseteq U_1^*$. Ma anche $x \in \mathcal{X}_1$ quindi $x \notin U_1^*$, contraddizione. Quindi $\mathcal{X}$ è irriducibile ed è ovviamente ridotto dato che $\Gamma(U^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è ridotto.

Come è noto dal corso di Geometria Algebrica 1,

$$X = V_1 \cup \ldots \cup V_s$$

dove le $V_i$ sono varietà affini ed aperti di $X$. Si vede allora facilmente che

$$\mathcal{X} = V_1^* \cup \ldots \cup V_s^*$$

e che $V_i^* \cong \operatorname{Spec}(k[V_i])$ (i punti di $V_i^*$ corrispondono a chiusi irriducibili di $V_i$, i quali a loro volta, essendo $k$ algebricamente chiuso, corrispondono agli ideali primi di $k[V_i]$ - il fatto che si tratti di un isomorfismo è lasciato per esercizio) e quindi $\mathcal{X}$ è uno schema di tipo finito. Mostriamo che $\mathcal{X}$ è uno schema su $k$, ovvero diamo un morfismo

$$(f, f^\sharp) : (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to (\operatorname{Spec}(k), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}).$$

Essendo $\operatorname{Spec}(k) = \{[(0)]\}$, la mappa $f : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec}(k)$ sarà la mappa costante. Invece per definire $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)} \to f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, consideriamo un aperto non vuoto $U$ di $\operatorname{Spec}(k)$, quindi $U = \operatorname{Spec}(k)$. Si ha

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}(\operatorname{Spec}(k)) \cong k$$

mentre

$$f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) = f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Spec}(k)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}(\operatorname{Spec}(k)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \Gamma(X^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

e la mappa

$$f^\sharp(U) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}(U) \cong k \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$$

è la mappa che associa ad ogni elemento $\lambda \in k$ la funzione costante $\lambda$ (quindi regolare su $X$). $\square$

Questa costruzione permette di dimostrare che, su un campo algebricamente chiuso, la categoria delle $k$-prevarietà è la "stessa" che quella dei $k$-schemi ridotti irriducibili di tipo finito. Infatti si ha

**Proposizione 12.11.** *Sia $k$ un campo algebricamente chiuso. Esiste un'equivalenza di categorie*

$$(k\text{-prevarietà}) \longrightarrow (k\text{-schemi ridotti irriducibili di tipo finito}).$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo solo l'esistenza del funtore. Per il resto della dimostrazione si rimanda a [H] o [GW].

A livello di oggetti il funtore associa ad una $k$-prevarietà $X$ lo schema $\mathcal{X}$ costruito precedentemente. Consideriamo ora un morfismo di $k$-prevarietà $f : X_1 \to X_2$. Definiamo

$$F : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$$

ponendo $F = f$ su $X_1$ e, per ogni $W \subseteq X_1$ chiuso irriducibile di dimensione positiva sia

$$F([W]) = \begin{cases} \overline{f(W)} & \text{se } \overline{f(W)} \text{ è un punto} \\ [\overline{f(W)}] & \text{se } \dim(\overline{f(W)}) > 0 \end{cases}.$$

Se $U_2^* \subseteq \mathcal{X}_2$ è un aperto si verifica subito che

$$F^{-1}(U_2^*) = (f^{-1}(U_2))^*$$

e quindi $F$ è continua. Ora dobbiamo definire un morfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_2} \to F_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}$ ovvero, per ogni aperto $U_2^*$ di $\mathcal{X}_2$, un omomorfismo

$$\Gamma(U_2^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_2}) \to \Gamma(U_2^*, F_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}).$$

Come sappiamo $\Gamma(U_2^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_2}) = \Gamma(U_2, \mathcal{O}_{X_2})$ mentre

$$\Gamma(U_2^*, F_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}) = \Gamma(F^{-1}(U_2^*), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}) = \Gamma((f^{-1}(U_2))^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}) = \Gamma(f^{-1}(U_2), \mathcal{O}_{X_1})$$

E quindi dobbiamo definire un omomorfismo

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}_{X_2}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U_2), \mathcal{O}_{X_1})$$

Ma questo non è altro che la mappa standard tra funzioni regolari:

associando ad ogni funzione regolare $\psi$ su $U_2$ la funzione regolare $\psi \circ f$ su $f^{-1}(U_2)$, questo definisce l'omomorfismo richiesto

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}_{X_2}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U_2), \mathcal{O}_{X_1}). \quad \square$$

La proposizione precedente giustifica la seguente definizione

**Definizione 12.12.** Sia $k$ un campo algebricamente chiuso. Una *$k$-varietà* è un $k$-schema $X$ ridotto irriducibile e di tipo finito. La *dimensione di $X$* è la dimensione della corrispondente $k$-prevarietà.

## 13. Fasci coerenti e loro coomologia

Inizieremo ora a studiare la coomologia dei fasci. Lo faremo per una classe particolare di fasci, detti quasi-coerenti. E inizieremo dal caso degli schemi affini. Premettiamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 13.1.** Siano $A$ e $B$ due anelli, siano $M$ un $A$-modulo e $N$ un $B$-modulo. Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli e sia $\psi : M \to N$ un omomorfismo dei corrispondenti gruppi abeliani. $\varphi$ e $\psi$ su dicono *compatibili con le strutture di modulo* se

$$\psi(a \cdot m) = \varphi(a) \cdot \psi(m)$$

per ogni $a \in A$ e per ogni $m \in M$.

**Definizione 13.2.** Sia $X$ uno schema. Un *fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli* è un fascio $\mathcal{F}$ su $X$ tale che $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è un $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-modulo per ogni aperto $U$ di $X$ e tale che le restrizioni

$${}^{\mathcal{F}}\rho_V^U : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$$

sono compatibili con le strutture di modulo via l'omomorfismo di anelli

$${}^{\mathcal{O}_X}\rho_V^U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_X).$$

Vediamo subito un esempio importante per noi.

**Definizione 13.3.** Sia $A$ un anello e sia $X = \mathrm{Spec}(A)$. Sia $M$ un $A$-modulo. Per ogni $f \in A$ sia $M_f$ la localizzazione di $M$, cioè

$$M_f = \{\frac{m}{f^n}, m \in M, n \geq 0\}.$$

Il *fascio associato ad* $M$ è il fascio $\widetilde{M}$ su $X = \mathrm{Spec}(A)$ definito, sulla base degli aperti principali nel modo seguente:

$$\Gamma(U_f, \widetilde{M}) = M_f,$$

con restrizioni (come nel caso di $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$): se $U_g \subseteq U_f$ e $g^s = bf$ per qualche $s \geq 1$ e $b \in A$ allora

$$\rho_g^f(\frac{m}{f^n}) = \rho_{U_g}^{U_f}(\frac{m}{f^n}) = \frac{mb^n}{g^{sn}}.$$

Il fascio $\widetilde{M}$ si estende poi a $X = \mathrm{Spec}(A)$ usando la base (Proposizione 2.6). È ovvio inoltre che si tratta di un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Valgono le seguenti osservazioni, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Osservazione 13.4.** Sia $A$ un anello, $M$ un $A$-modulo e sia $X = \mathrm{Spec}(A)$. Allora:

(a) $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$;
(b) per ogni $x \in X$ si ha che $\widetilde{M}_x \cong M_{\mathfrak{p}_x}$.

**Definizione 13.5.** Sia $X$ uno schema e sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Diremo che $\mathcal{F}$ è *quasi-coerente* (rispettivamente *coerente)* se esiste un ricoprimento di aperti affini $\mathcal{U}$ di $X$ tale che, per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha che $\mathcal{F}_{|U} \cong \widetilde{M}$ dove $U = \mathrm{Spec}(A)$ e $M$ è un $A$-modulo (rispettivamente $M$ è un $A$-modulo finitamente generato).

**Osservazione 13.6.** Sia $X$ uno schema e sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Allora $\mathcal{F}$ è quasi-coerente se e solo se per ogni aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ esiste un $A$-modulo tale che $\mathcal{F}_{|U} \cong \widetilde{M}$

Per una dimostrazione di questo fatto si veda [H, Prop. II.5.4].

Il risultato principale riguardante la coomologia dei fasci quasi-coerenti su uno schema affine è il seguente

**Teorema 13.7.** (Teorema di Serre)
*Sia $X$ uno schema affine e sia $\mathcal{F}$ un fascio quasi-coerente su $X$. Allora $H^j(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $j \geq 1$.*

Osserviamo subito che il teorema è il migliore possibile: infatti se $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e $M \neq 0$ allora

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \widetilde{M}) = \Gamma(U_1, \widetilde{M}) = M_1 = M \neq 0.$$

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di premettere la seguente costruzione.

**Definizione 13.8.** Sia $X$ uno spazio topologico, sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$ e sia $U$ un aperto di $X$. Il fascio ${}_U\mathcal{F}$ è definito, per ogni aperto $V$ di $X$, ponendo

$$\Gamma(V, {}_U\mathcal{F}) = \Gamma(V \cap U, \mathcal{F})$$

con le restrizioni definite nel modo ovvio usando quelle di $\mathcal{F}$.

Facciamo delle osservazioni che saranno utili nel seguito.

**Osservazione 13.9.** Sia $X$ uno spazio topologico, siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di gruppi abeliani su $X$ e sia $U$ un aperto di $X$. Allora:

(a) se $j : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione, allora ${}_U\mathcal{F} \cong j_*(\mathcal{F}_{|U})$;
(b) è definito un morfismo di fasci

$${}_U^{\mathcal{F}}f : \mathcal{F} \to {}_U\mathcal{F};$$

(c) per ogni $i \geq 0$ è definito un omomorfismo

$$H^i({}_U^{\mathcal{F}}f) : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X,_U\mathcal{F});$$

(d) ad ogni morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è associato un morfismo

$$_U\varphi : \ _U\mathcal{F} \to_U \mathcal{G}.$$

*Dimostrazione.* (a): esercizio; (b): per ogni ogni aperto $V$ di $X$ sia

$$({}_U^{\mathcal{F}}f)(V) : \Gamma(V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho^V_{V\cap U}} \Gamma(V \cap U, \mathcal{F}) = \Gamma(V,_U\mathcal{F})$$

È facile vedere che questo definisce un morfismo ${}_U^{\mathcal{F}}\varphi : \mathcal{F} \to_U \mathcal{F}$.
(c): ${}_U^{\mathcal{F}}f$ induce, come è noto (Proposizione 9.7), un omomorfismo

$$H^i({}_U^{\mathcal{F}}f) : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X,_U\mathcal{F}).$$

(d): basta definire, per ogni aperto $V$ di $X$:

$$(_U\varphi)(V) : \Gamma(V,_U \mathcal{F}) = \Gamma(V \cap U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi(V\cap U)} \Gamma(V \cap U, \mathcal{G}) = \Gamma(V,_U\mathcal{G}) \ . \qquad \square$$

Il risultato tecnico seguente verrà utilizzato per dimostrare il Teorema di Serre (Teorema 13.7).

**Proposizione 13.10.** *Sia $X$ spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia chiusa rispetto alle intersezioni finite (cioè tale che ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{B}$ sta in $\mathcal{B}$). Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$ e supponiamo che per qualche $i \geq 1$ si abbia*

$$H^j(W, \mathcal{F}) = 0 \text{ per ogni } 0 < j < i \text{ e per ogni } W \in \mathcal{B} \text{ (la condizione è vuota se } i = 1).$$

*Allora, per ogni $\sigma \in H^i(X, \mathcal{F})$, esiste un ricoprimento con aperti di $\mathcal{B}$, $X = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ tale che, per ogni $\alpha \in I$ si ha*

$$\sigma \in \mathrm{Ker}\{H^i({}_{W_\alpha}^{\mathcal{F}}f) : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X,_{W_\alpha}\mathcal{F})\}.$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su $i$. Supponiamo $i = 1$.

Per ogni $W \in \mathcal{B}$ osserviamo che c'è un diagramma commutativo a righe esatte (ottenuto usando le Osservazioni 13.9(b) e (d):

(28)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{}_W^{\mathcal{F}}f"] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "{}_W^{\mathcal{D}(\mathcal{F})}f"] & \mathrm{Coker}\,\varphi \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & _W\mathcal{F} \arrow[r, "_W\varphi"] & _W(\mathcal{D}(\mathcal{F})) \arrow[r, "\chi"] & \mathrm{Coker}(_W\varphi) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $h$ è il morfismo indotto, a livello di fasci associati (Lemma 9.1), dal morfismo di prefasci $\mathrm{PCoker}\varphi \to \mathrm{PCoker}(_W\varphi)$.

La successione di coomologia associata alla prima riga del diagramma (28) da luogo alla successione esatta

(29)
$$H^0(X, \mathrm{Coker}\,\varphi) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})).$$

Ma sappiamo che $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è fiacco e che i fasci fiacchi sono aciclici (Proposizione 9.9(b)), quindi, in particolare $H^1(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = 0$.

L'esattezza di (29) implica allora che $\delta$ è suriettiva.

Dato che $\sigma \in H^1(X, \mathcal{F})$, deduciamo che esiste

$$\tau \in H^0(X, \mathrm{Coker}\,\varphi) = \Gamma(X, \mathrm{Coker}\,\varphi) \text{ tale che } \sigma = \delta(\tau).$$

Del resto, per ogni $x \in X$ l'applicazione $\psi_x : \mathcal{D}(\mathcal{F})_x \to (\operatorname{Coker}\varphi)_x$ è suriettiva, quindi, come visto in precedenza, esiste un aperto $V_x$ contenente $x$ e una sezione $\varepsilon^{(x)} \in \Gamma(V_x, \mathcal{D}(\mathcal{F}))$ tali che

$$\psi(V_x)(\varepsilon^{(x)}) = \rho^X_{V_x}(\tau).$$

Inoltre, dato che $\mathcal{B}$ è una base, esiste un aperto $W_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W_x \subseteq V_x$ e quindi

$$\psi(W_x)(\rho^{V_x}_{W_x}(\varepsilon^{(x)})) = \rho^{V_x}_{W_x}(\psi(W_x)(\varepsilon^{(x)})) = \rho^{V_x}_{W_x}(\rho^X_{V_x}(\tau)) = \rho^X_{W_x}(\tau).$$

Al variare di $x \in X$ gli aperti $W_x$ danno un ricoprimento aperto di $X$ con elementi di $\mathcal{B}$, quindi, modificando leggermente la notazione, abbiamo trovato degli aperti $W_\alpha \in \mathcal{B}$ che danno un ricoprimento aperto di $X$ ed esistono delle sezioni

$$\varepsilon_\alpha \in \Gamma(W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \text{ tali che } \psi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha) = \rho^X_{W_\alpha}(\tau).$$

Ora consideriamo il diagramma commutativo, indotto dalle successioni esatte di fasci (28) applicate a $W_\alpha$

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})) & \longrightarrow & H^0(X, \operatorname{Coker}\varphi) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{F}) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\
H^0(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\gamma} & H^0(X, \operatorname{Coker}({}_{W_\alpha}\varphi)) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{F})
\end{array}$$

dove abbiamo posto, per comodità, $\beta = H^1({}^{\mathcal{F}}_{W_\alpha}f), \gamma = \chi(X)$ e $\theta = h(X)$.

Abbiamo $\sigma \in H^1(X, \mathcal{F})$ e vogliamo dimostrare che $\beta(\sigma) = 0$.

D'altro canto però sappiamo che $\sigma = \delta(\tau)$ e quindi

$$\beta(\sigma) = \beta(\delta(\tau)) = \delta'(\theta(\tau))$$

dunque, per concludere il caso $i = 1$, abbiamo bisogno di dimostrare che $\delta'(\theta(\tau)) = 0$, ovvero che

(30) $$\theta(\tau) \in \operatorname{Ker}\delta' = \operatorname{Im}\gamma.$$

Ora osserviamo che

$$H^0(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(X \cap W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F}))$$

e che abbiamo trovato prima delle sezioni $\varepsilon_\alpha \in \Gamma(W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F}))$ tali che

$$\psi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha) = \rho^X_{W_\alpha}(\tau).$$

Ma allora possiamo anche vedere $\varepsilon_\alpha$ come un elemento di $H^0(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F}))$. Questo elemento lo chiamiamo $\overline{\varepsilon}_\alpha$ (per non confondere).

Dimostreremo che

(31) $$\theta(\tau) = \gamma(\overline{\varepsilon}_\alpha).$$

Questo darà la (30) e concluderà il caso $i = 1$ della proposizione.

Ora

$$\theta(\tau) = \gamma(\overline{\varepsilon}_\alpha)$$

se e solo se

$$(\theta(\tau))_x = (\gamma(\overline{\varepsilon}_\alpha))_x$$

per ogni $x \in X$.

Ma

(32)
$$(\theta(\tau))_x = (h(X)(\tau))_x = h_x(\tau_x) = h_x([\tau]) = h_x([\rho^X_{W_\alpha}(\tau)]) = h_x([\psi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha)]) = [h(W_\alpha) \circ \psi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha)]$$

e

(33) $$(\gamma(\overline{\varepsilon}_\alpha))_x = [\chi(X)(\overline{\varepsilon}_\alpha)] = [\rho^X_{W_\alpha}(\chi(X)(\overline{\varepsilon}_\alpha))] = [\chi(W_\alpha)(\rho^X_{W_\alpha}(\overline{\varepsilon}_\alpha))].$$

Calcoliamo $\rho^X_{W_\alpha}(\bar{\varepsilon}_\alpha)$, dove

$$\rho^X_{W_\alpha} : \Gamma(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) \to \Gamma(W_\alpha, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})).$$

Come sappiamo,

$$\Gamma(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(X \cap W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F}))$$

e

$$\Gamma(W_\alpha, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(X \cap W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(W_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{F}))$$

e, per definizione $\rho^X_{W_\alpha}$ non è altro che la restrizione $\rho^{W_\alpha}_{W_\alpha}$ di $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, quindi è l'identità, solo che la prima è vista su ${}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})$ e la seconda su $\mathcal{D}(\mathcal{F})$.

In altre parole abbiamo dimostrato che

$$\rho^X_{W_\alpha}(\bar{\varepsilon}_\alpha) = \varepsilon_\alpha.$$

Ma allora, sostituendo nella (33) e usando la (32), si ottiene

$$(\gamma(\bar{\varepsilon}_\alpha))_x = [\chi(W_\alpha)(\rho^X_{W_\alpha}(\bar{\varepsilon}_\alpha))] = [\chi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha)] = [\chi(W_\alpha)\circ({}^{\mathcal{D}(\mathcal{F})}_{W_\alpha} f)(\varepsilon_\alpha)] = [h(W_\alpha)\circ\psi(W_\alpha)(\varepsilon_\alpha)] = (\theta(\tau))_x$$

questo dimostra la (31) e quindi il caso $i = 1$ è dimostrato.

Supponiamo ora $i \geq 2$.

Prima di procedere con il passo induttivo osserviamo che per ogni $W \in \mathcal{B}$ si ha un isomorfismo

$${}_W(\operatorname{Coker}\varphi) \cong \operatorname{Coker}({}_W\varphi).$$

Infatti per ogni aperto $V \in \mathcal{B}$ abbiamo per ipotesi che $W \cap V \in B$. Inoltre $0 < 1 < i$, quindi, sempre per ipotesi, $H^1(W \cap V, \mathcal{F}) = 0$ e quindi si ha una successione esatta

$$0 \to \Gamma(W \cap V, \mathcal{F}) \overset{\varphi(W\cap V)}{\longrightarrow} \Gamma(W \cap V, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \to \Gamma(W \cap V, \operatorname{Coker}\varphi) \to 0.$$

Ma, come sappiamo,

$$\Gamma(W \cap V, \mathcal{F}) = \Gamma(V, {}_W\mathcal{F}), \Gamma(W \cap V, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = \Gamma(V, {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F}))$$

e

$$\Gamma(W \cap V, \operatorname{Coker}\varphi) = \Gamma(V, {}_W(\operatorname{Coker}\varphi)),$$

quindi la successione esatta può essere riscritta come

$$0 \to \Gamma(V, {}_W\mathcal{F}) \overset{({}_W\varphi)(V)}{\longrightarrow} \Gamma(V, {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F})) \to \Gamma(V, {}_W(\operatorname{Coker}\varphi)) \to 0.$$

Allora questo dimostra che

$$\Gamma(V, {}_W(\operatorname{Coker}\varphi)) \cong \operatorname{Coker}\big(({}_W\varphi)(V)\big) = (\operatorname{PCoker}({}_W\varphi))(V)$$

Dunque i prefasci ${}_W(\operatorname{Coker}\varphi)$ e $\operatorname{PCoker}({}_W\varphi)$ sono isomorfi, e quindi lo sono anche i loro fasci associati, dunque

$${}_W(\operatorname{Coker}\varphi) \cong \big({}_W(\operatorname{Coker}\varphi)\big)^+ \cong \big(\operatorname{PCoker}({}_W\varphi)\big)^+ = \operatorname{Coker}({}_W\varphi).$$

Ora procediamo al passo induttivo.

Verifichiamo intanto che $\operatorname{Coker}\varphi$ verifica le ipotesi della proposizione per $i - 1 \geq 1$, ovvero che

$$H^j(W, \operatorname{Coker}\varphi) = 0 \text{ per ogni } 0 < j < i - 1 \text{ e per ogni } W \in \mathcal{B}.$$

Sia $0 < j < i - 1$. In particolare $0 < j + 1 < i$, quindi, per ipotesi, $H^{j+1}(W, \mathcal{F}) = 0$. Del resto, come sappiamo, $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è fiacco, quindi aciclico, quindi $H^j(W, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = 0$. Dalla prima riga del diagramma (28) segue che c'è una successione esatta

$$0 = H^j(W, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \to H^j(W, \operatorname{Coker}\varphi) \to H^{j+1}(W, \mathcal{F}) = 0$$

e quindi deduciamo che $H^j(W, \operatorname{Coker}\varphi) = 0$ per ogni $0 < j < i - 1$ e per ogni $W \in \mathcal{B}$.

Ma $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è fiacco, quindi $H^i(X,\mathcal{D}(\mathcal{F}))=0$ e quindi dal diagramma (28) deduciamo, per ogni $W\in\mathcal{B}$, un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H^{i-1}(X,\operatorname{Coker}\varphi) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k_W"] & H^i(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "H^i({}^{\mathcal{F}}_W f)"] & 0 \\ H^{i-1}(X,\operatorname{Coker}({}_W\varphi)) \arrow[r, "g'"] & H^i(X,{}_W\mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

nel quale, per esattezza, $g$ è suriettiva.

Ma abbiamo visto che $\operatorname{Coker}({}_W\varphi))\cong{}_W(\operatorname{Coker}\varphi)$, quindi il diagramma si riscrive come

$$\begin{tikzcd} H^{i-1}(X,\operatorname{Coker}\varphi) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k'_W"] & H^i(X,\mathcal{F}) \arrow[d, "H^i({}^{\mathcal{F}}_W f)"] \\ H^{i-1}(X,{}_W(\operatorname{Coker}\varphi)) \arrow[r, "g''"] & H^i(X,{}_W\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

Per ipotesi induttiva, per ogni $\tau\in H^{i-1}(X,\operatorname{Coker}\varphi)$, esiste un ricoprimento con aperti di $\mathcal{B}$, $X=\bigcup_{\alpha\in I}W_\alpha$ tale che per ogni $\alpha\in I$ si ha $\tau\in\operatorname{Ker}k'_{W_\alpha}$.

Ora noi abbiamo $\sigma\in H^i(X,\mathcal{F})$ ed essendo $g$ suriettiva esiste $\tau\in H^{i-1}(X,\operatorname{Coker}\varphi)$ tale che $\sigma=g(\tau)$. Preso il ricoprimento associato a $\tau$ come detto sopra, si ha

$$H^i({}^{\mathcal{F}}_W f)(\sigma)=H^i({}^{\mathcal{F}}_W f)(g(\tau))=g''(k'_{W_\alpha}(\tau))=g''(0)=0. \qquad \square$$

Vediamo ora alcuni risultati preparatori.

**Lemma 13.11.** *Sia $A$ un anello, sia $X=\operatorname{Spec}(A)$ e sia*

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

*una successione esatta di $A$-moduli. Allora è indotta una successione esatta di fasci quasi-coerenti*

$$0\to\widetilde{M'}\to\widetilde{M}\to\widetilde{M''}\to 0$$

*che è esatta in sezioni globali.*

*Dimostrazione.* Per ogni $f\in A$ si vede subito che c'è una successione esatta

$$0\to(M')_f\to M_f\to(M'')_f\to 0$$

e quindi una successione esatta

$$0\to\widetilde{M'}(U_f)\to\widetilde{M}(U_f)\to\widetilde{M''}(U_f)\to 0.$$

Questo dimostra l'esattezza della successione

$$0\to\widetilde{M'}\to\widetilde{M}\to\widetilde{M''}\to 0$$

e la successione delle sezioni globali

$$0\to\Gamma(X,\widetilde{M'})\to\Gamma(X,\widetilde{M})\to\Gamma(X,\widetilde{M''})\to 0$$

è esatta dato che si tratta proprio della succesione originaria

$$0\to M'\to M\to M''\to 0. \qquad \square$$

**Lemma 13.12.** *Sia $A$ un anello, sia $X=\operatorname{Spec}(A)$ e sia $M$ un $A$-modulo. Sia $X=\bigcup_{\alpha\in I}U_{f_\alpha}$ un ricoprimento finito per certi $f_\alpha\in A$. Allora c'è un'inclusione*

$$M\hookrightarrow\bigoplus_{\alpha\in I}M_{f_\alpha}\,.$$

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto in precedenza (nella dimostrazione del Lemma 10.8), per ogni $s \geq 1$ esistono $a_\alpha \in A$ tali che
$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha f_\alpha^s = 1.$$
Consideriamo ora la mappa $M \to \bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha}$ che manda $m \in M$ in
$$(\frac{m}{1})_{\alpha \in I} \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha}$$
e mostriamo che è iniettiva.

Se $\frac{m}{1} = 0 \in M_{f_\alpha}$ allora esiste $s_\alpha \geq 0$ tale che $f_\alpha^{s_\alpha} m = 0$. Quindi se $s = \max\{s_\alpha, \alpha \in I\}$ allora $f_\alpha^s m = 0$ per ogni $\alpha \in I$ e si ha
$$m = 1m = (\sum_{\alpha \in I} a_\alpha f_\alpha^s) m = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha (f_\alpha^s m) = 0. \qquad \square$$

**Lemma 13.13.** *Sia $A$ un anello, sia $M$ un $A$-modulo e siano $f, g \in A$. Allora $M_{fg}$ ha una struttura di $A_f$-modulo e c'è un isomorfismo di $A_f$-moduli*
$$M_{fg} \cong (M_f)_{\frac{g}{1}}$$
*(dove $(M_f)_{\frac{g}{1}}$ ha la struttura ovvia di $A_f$-modulo ottenuta moltiplicando al numeratore).*

*Dimostrazione.* Posto
$$\frac{a}{f^n} \cdot \frac{m}{(fg)^l} = \frac{ag^n m}{(fg)^{n+l}}$$
si verifica subito che questo definisce una struttura di $A_f$-modulo su $M_{fg}$ (esercizio). Sia ora
$$\varphi : M_{fg} \to (M_f)_{\frac{g}{1}}$$
l'applicazione definita da
$$\varphi(\frac{m}{(fg)^l}) = \frac{\frac{m}{f^l}}{(\frac{g}{1})^l}.$$
È facile verificare che $\varphi$ è un isomorfismo di $A_f$-moduli (esercizio). $\square$

**Lemma 13.14.** *Sia $A$ un anello, $M$ un $A$-modulo e sia $f \in A$. Allora, via l'omeomorfismo $U_f \cong \operatorname{Spec}(A_f)$, c'è un isomorfismo di $\mathcal{O}_{U_f}$-moduli*
$$(\widetilde{M})_{|U_f} \cong \widetilde{(M_f)}.$$
*In particolare $(\widetilde{M})_{|U_f}$ è quasi-coerente su $U_f$.*

*Dimostrazione.* Usando l'omeomorfismo $U_f \cong \operatorname{Spec}(A_f)$ costruito nel Lemma 10.13 è facile vedere che la base $\{U_g, g \in A : U_g \subseteq U_f\}$ di $U_f$ corrisponde alla base $\{U_{\frac{g}{1}}, g \in A\}$ di $\operatorname{Spec}(A_f)$. Ma, usando il Lemma 13.13 si ha un isomorfismo di $A_f$-moduli
$$(\widetilde{M})_{|U_f}(U_g) = \widetilde{M}(U_f \cap U_g) = \widetilde{M}(U_{fg}) = M_{fg} \cong (M_f)_{\frac{g}{1}} = \widetilde{(M_f)}(U_{\frac{g}{1}})$$
e questo dimostra che $(\widetilde{M})_{|U_f} \cong \widetilde{(M_f)}$. Ne segue che $(\widetilde{M})_{|U_f}$ è quasi-coerente. $\square$

Del resto $M_f$ ha anche una struttura ovvia di $A$-modulo. Inoltre è facile vedere, come nel Lemma 13.13, che c'è un isomorfismo di $A$-moduli, $M_{fg} \cong (M_f)_g$ per ogni $f, g \in A$. Considerando la struttura di $A$-modulo si ha

**Lemma 13.15.** *Sia $A$ un anello, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $M$ un $A$-modulo, sia $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e sia $f \in A$. Allora c'è un isomorfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli*
$${}_{U_f}\mathcal{F} \cong \widetilde{(M_f)}.$$
*In particolare ${}_{U_f}\mathcal{F}$ è quasi-coerente su $X$.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto principale $U_g$ si ha

$$\Gamma(U_g, {}_{U_f}\mathcal{F}) = \Gamma(U_g \cap U_f, \mathcal{F}) = \Gamma(U_{fg}, \mathcal{F}) = \Gamma(U_{fg}, \widetilde{M}) = M_{fg} \cong (M_f)_g = \Gamma(U_g, \widetilde{(M_f)}).$$

Dato che gli $\{U_g, g \in A\}$ costituiscono una base della topologia (Lemma 10.7), questo isomorfismo si estende a tutti gli aperti. $\square$

Ora dimostriamo il Teorema di Serre (Teorema 13.7).

*Dimostrazione.* Sia $A$ un anello tale che $X = \mathrm{Spec}(A)$ e sia $M$ un $A$-modulo tale che $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ (che possiamo assumere per l'Osservazione 13.6). Per ogni ricoprimento finito $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_{f_\alpha}$ abbiamo, dal Lemma 13.12, una successione esatta di $A$-moduli

$$0 \to M \to \bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha} \to N \to 0$$

dove $N$ è il modulo quoziente $\big(\bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha}\big)/M$. Dal Lemma 13.11 ne deduciamo una successione esatta

$$0 \to \widetilde{M} \to \big(\widetilde{\bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha}}\big) \to \widetilde{N} \to 0 \tag{34}$$

che sappiamo essere esatta anche in sezioni globali.

Ora si vede facilmente (esercizio) che

$$\big(\widetilde{\bigoplus_{\alpha \in I} M_{f_\alpha}}\big) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \widetilde{M_{f_\alpha}}.$$

Del resto sappiamo che $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e, dal Lemma 13.15, che

$${}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F} \cong \widetilde{(M_{f_\alpha})}$$

e quindi, posto $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, la successione esatta (34) diventa

$$0 \to \mathcal{F} \to \bigoplus_{\alpha \in I} {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0. \tag{35}$$

Ora osserviamo che, come è facile vedere,

$$H^i(X, \bigoplus_{\alpha \in I} {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H^i(X, {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F})$$

poiché, in generale, la coomologia commuta con la somma diretta. In particolare la successione (35) induce una mappa

$$k_i : H^i(X, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{\alpha \in I} H^i(X, {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F}).$$

La mappa $k_i$ è proprio quella della Proposizione 13.10. Applicheremo la Proposizione 13.10 prendendo per base quella degli aperti principali, che è chiusa rispetto alle intersezioni finite. Inoltre, dato che $X$ è compatto, possiamo assumere $I$ finito.

Con la notazione precedente, si avrà che

$$k_i = \oplus_{\alpha \in I} H^i({}^{\mathcal{F}}_{U_{f_\alpha}} f) \quad \text{e} \quad \sigma \in \mathrm{Ker}\, k_i.$$

Studiamo ora la mappa $k_1$.

Passando alla coomologia in (35) otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \bigoplus_{\alpha \in I} {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F}) \xrightarrow{g} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{h}$$

$$\xrightarrow{h} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{k_1} \bigoplus_{\alpha\in I} H^1(X,{}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F}) \cong H^1(X, \bigoplus_{\alpha\in I} {}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F}).$$

Dall'esattezza in sezioni globali deduciamo che $g$ è suriettiva. Quindi

$$H^0(X,\mathcal{G}) = \mathrm{Im} g = \mathrm{Ker}\, h$$

ovvero $h = 0$. Ma allora $0 = \mathrm{Im} h = \mathrm{Ker}\, k_1$ da cui deduciamo che $k_1$ è iniettiva e quindi abbiamo dedotto che, per ogni ricoprimento finito $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_{f_\alpha}$ la mappa

$$k_1 : H^1(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{\alpha\in I} H^1(X,{}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F})$$

è iniettiva.

Procediamo ora a dimostrare il teorema per induzione su $i$.

Supponiamo $i = 1$. Allora, per ogni $\sigma \in H^1(X,\mathcal{F})$ la Proposizione 13.10 asserisce che esiste un ricoprimento finito di $X$ con aperti della base, ovvero aperti $U_{f_\alpha}$, tale che $k_1(\sigma) = 0$.

Ma sappiamo che $k_1$ è iniettiva, quindi $\sigma = 0$. Quindi $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$ e il caso $i = 1$ è dimostrato.

Supponiamo ora $i \geq 2$. Per ogni $f \in A$ sappiamo dal Lemma 13.14 che $\mathcal{F}_{|U_f} = (\widetilde{M})_{|U_f}$ è quasi-coerente su $U_f$ e quindi, per induzione abbiamo che $H^j(U_f,\mathcal{F}) = 0$ per ogni $0 < j \leq i-1$.

Ma allora $\mathcal{F}$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 13.10. Sia $\sigma \in H^i(X,\mathcal{F})$. Per la Proposizione 13.10 esiste un ricoprimento finito di $X$ con aperti della base, ovvero aperti $U_{f_\alpha}$, tale che

$$\sigma \in \mathrm{Ker}\, k_i.$$

Ora la coomologia della successione esatta (35) da luogo alla successione esatta

$$H^{i-1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{k_i} \bigoplus_{\alpha\in I} H^i(X,{}_{U_{f_\alpha}}\mathcal{F})$$

Ma $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ è un fascio quasi-coerente, quindi, per induzione, $H^{i-1}(X,\mathcal{G}) = 0$. Dunque $k_i$ è iniettiva e $k_i(\sigma) = 0$, da cui $\sigma = 0$. Pertanto $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$. □

Ora introduciamo la seguente convenzione-definizione.

**Definizione 13.16.** Sia $X$ uno schema e sia $U$ un aperto di $X$. Posto $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{X|U}$ diremo che $U$ *è uno schema* intendendo assegnata la struttura (di schema) $(U,\mathcal{O}_U)$.

Possiamo ora generalizzare il Teorema di Serre introducendo la seguente

**Definizione 13.17.** Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ si dice *affine* se esiste un ricoprimento di aperti affini $\mathcal{U}$ di $Y$ tale che $f^{-1}(U) \subseteq X$ sia uno schema affine per ogni $U \in \mathcal{U}$. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ si dice un'*immersione aperta* se $f$ induce un isomorfismo di $X$ con un aperto di $Y$. $f$ si dice *immersione chiusa* se induce un omeomorfismo di $X$ con un chiuso di $Y$ e $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è suriettiva.

Ora vediamo i sottoschemi chiusi.

**Definizione 13.18.** Sia $X$ uno schema. Siano $f : Y \to X, g : Z \to X$ due immersioni chiuse. Diremo che $f$ e $g$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo $h : Y \to Z$ tale che $g \circ h = f$. Un sottoschema chiuso di $X$ è una classe di equivalenza di immersioni chiuse.

Nel caso degli schemi affini, possiamo identificare i sottoschemi chiusi al modo seguente

**Proposizione 13.19.** *Sia $A$ un anello e sia $X = \mathrm{Spec}(A)$. C'è una corrispondenza biunivoca*

$$\Phi : \{\text{ideali } \mathfrak{a} \text{ di } A\} \to \{\text{sottoschemi chiusi di } X\}$$
$$\mathfrak{a} \mapsto \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}).$$

*Dimostrazione.* Vedasi [H, Cor. II.5.10]. $\square$

Abbiamo i seguenti fatti, la cui dimostrazione, con l'eccezione di (a) per il quale si veda [H, Ex. II.5.17(a)], è lasciata per esercizio (per il (c) occorre usare il Corollario 16.6 e (a)).

**Osservazione 13.20.**

(a) Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è affine se e solo se per ogni aperto affine $U$ di $Y$ si ha che $f^{-1}(U) \subseteq X$ è uno schema affine.
(b) Ogni immersione chiusa è un morfismo affine.
(c) Se $O \in \mathbb{A}^n$ è l'origine e $j : \mathbb{A}^n \setminus \{O\} \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ è l'inclusione, allora $j$ è un'immersione aperta che non è un morfismo affine.
(d) Se $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su $X$ e $f : X \to Y$ è affine allora $f_*\mathcal{F}$ è quasi-coerente su $Y$.

La "generalizzazione" del Teorema di Serre è la seguente

**Teorema 13.21.** *Sia $f : X \to Y$ un morfismo affine di schemi e sia $\mathcal{F}$ un fascio quasi-coerente su $X$. Allora*
$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}) \text{ per ogni } i \geq 0.$$

Prima di dimostrarlo spieghiamo perché si tratta di una "generalizzazione".

Intanto se $Y$ è uno spazio topologico costituito da un'unico punto, avendo un solo aperto non vuoto, ne segue banalmente che ogni fascio di gruppi abeliani $\mathcal{G}$ su $Y$ è fiacco, quindi è aciclico, ovvero $H^i(Y, \mathcal{G}) = 0$ per ogni $i \geq 1$. Ora, per esempio, se $A$ è una $k$-algebra, c'è un omomorfismo di anelli $k \to A$ che, per il Teorema 12.4, induce un morfismo di schemi (che è ovviamente affine)
$$X = \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k) = \{(0)\} =: Y.$$
Il Teorema 13.21 ci dice allora che $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_*\mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq 1$. Quindi si tratta di una "generalizzazione" nel senso che l'enunciato del Teorema 13.21 implica il Teorema di Serre, almeno per $k$-schemi.

Però attenzione! La dimostrazione del Teorema 13.21 usa il Teorema di Serre!

In realtà stiamo allora dicendo che i due teoremi sono equivalenti (almeno per $k$-schemi). Ma la versione del Teorema 13.21 è più generale perché vale su schemi qualsiasi.

Ora passiamo alla dimostrazione del Teorema 13.21.

*Dimostrazione.* Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\bullet$ una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci fiacchi. Per ipotesi, usando l'Osservazione 13.20(a), per ogni aperto affine $U$ di $Y$ si ha che $f^{-1}(U) \subseteq X$ è uno schema affine. Consideriamo il complesso

$$0 \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}^0) \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}^1) \to \dots \tag{36}$$

Sappiamo che $\Gamma(f^{-1}(U), -)$ è esatto a sinistra (Lemma 6.2). Del resto $f^{-1}(U)$ è uno schema affine, quindi $H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq 1$ per il Teorema di Serre. Ma allora la (36) è esatta, in quanto la sua coomologia per $i \geq 1$ è, per definizione, proprio $H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = 0$. Quindi
$$0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}^\bullet$$
essendo esatta per ogni $U$, quindi sugli aperti di una base, è una risoluzione di $f_*\mathcal{F}$.

Inoltre gli $\mathcal{F}^i, i \geq 0$ sono fiacchi, quindi, per l'Osservazione 8.2(a), anche gli $f_*\mathcal{F}^i$ sono fiacchi. Ma allora
$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) = H^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}^\bullet)) \cong H^i(\Gamma(f^{-1}(Y), \mathcal{F}^\bullet)) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{F}^\bullet)) = H^i(X, \mathcal{F}). \quad \square$$

## 14. La coomologia di Cech

Introdurremo un'altra definizione di coomologia dei fasci, la coomologia di Cech, e per gli schemi la confronteremo con la coomologia definita in precedenza.

**Definizione 14.1.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $I$ un insieme totalmente ordinato. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e per ogni $i_0, \dots i_n \in I$ sia $U_{i_0\dots i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$ e, per ogni $n \geq 0$ sia

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<\dots<i_n} \Gamma(U_{i_0\dots i_n}, \mathcal{F})$$

dove, per convenzione poniamo $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ se non ci sono $i_0, \dots i_n \in I$ tali che $i_0 < \dots < i_n$ (per esempio se $n \geq |I|$).

Osserviamo che un elemento $z \in \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è del tipo

$$z = (\sigma_{i_0\dots i_n}) \text{ con } \sigma_{i_0\dots i_n} \in \Gamma(U_{i_0\dots i_n}, \mathcal{F}).$$

**Definizione 14.2.** Sia

$$\delta^n_{\mathcal{U}} = \delta^n : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

definita nel modo seguente. Per ogni $z = (\sigma_{i_0\dots i_n}) \in \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definiamo

$$\delta^n(z) = (\delta^n(z)_{i_0\dots i_{n+1}})$$

ponendo

$$\delta^n(z)_{i_0\dots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{n+1}}$$

dove il simbolo $\hat{i}_j$ significa che l'indice $i_j$ viene omesso, e dove, per semplificare la scrittura, si è scritto $\sigma_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{n+1}}$ invece di

$$\rho^{U_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{n+1}}}_{U_{i_0\dots i_{n+1}}}(\sigma_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{n+1}}).$$

Ora, come vedremo, questo definisce un complesso di gruppi abeliani.

**Lemma 14.3.** *Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Allora, per ogni $n \geq 0$,*

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0.$$

*Dimostrazione.* Esercizio. $\square$

Il lemma permette la seguente

**Definizione 14.4.** Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Il complesso

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \ 0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

è chiamato *complesso di Cech* di $\mathcal{F}$ relativo al ricoprimento $\mathcal{U}$. Il gruppo

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

è chiamato *$n$-esimo gruppo di coomologia di Cech* di $\mathcal{F}$ relativo al ricoprimento $\mathcal{U}$.

Inizieremo ora a studiare la coomologia di Cech, con l'obiettivo di confrontarla con quella precedentemente definita.

Iniziamo a vedere che, a livello 0, le due coomologie coincidono.

Ricordiamo che $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ per la Proposizione 9.9(a).

**Proposizione 14.5.** *Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Consideriamo l'omomorfismo*

$$\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0\in I} \Gamma(U_{i_0}, \mathcal{F}), \quad \sigma \mapsto (\rho^X_{U_{i_0}}(\sigma)).$$

*Allora*

(a) $\epsilon$ *è iniettivo;*
(b) $\mathrm{Im}\epsilon = \mathrm{Ker}\,\delta^0$*;*
(c) $\Gamma(X,\mathcal{F}) \cong \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

*Dimostrazione.* Se $\epsilon(\sigma) = (\rho^X_{U_{i_0}}(\sigma))_{i_0\in I} = 0$ allora $\rho^X_{U_{i_0}}(\sigma) = 0$ per ogni $i_0 \in I$. Ma $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di $X$ e $\mathcal{F}$ è un fascio quindi $\sigma = 0$ e la (a) è dimostrata. Per vedere (b) e (c), vediamo chi è $\mathrm{Ker}\,\delta^0$.

Per definizione, preso

$$z = (\sigma_{i_0}) \in \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0\in I}\Gamma(U_{i_0},\mathcal{F})$$

si ha, usando la notazione precedente,

$$\delta^0(z)_{i_0 i_1} = \sum_{j=0}^{1}(-1)^j\sigma_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_1} = \sigma_{i_1} - \sigma_{i_0} = \rho^{U_{i_1}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_1}) - \rho^{U_{i_0}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_0}).$$

Ne segue che $z = (\sigma_{i_0}) \in \mathrm{Ker}\,\delta^0$ se e solo se

$$\rho^{U_{i_1}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_1}) = \rho^{U_{i_0}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_0}) \text{ per ogni } i_0, i_1 \in I. \tag{37}$$

Intanto vediamo che $\mathrm{Im}\epsilon \subseteq \mathrm{Ker}\,\delta^0$, ovvero verifichiamo che $\epsilon(\sigma)$ soddisfa (37).

Infatti

$$\rho^{U_{i_1}}_{U_{i_0 i_1}}(\rho^X_{U_{i_1}}(\sigma)) = \rho^X_{U_{i_0 i_1}}(\sigma) = \rho^{U_{i_0}}_{U_{i_0 i_1}}(\rho^X_{U_{i_0}}(\sigma)).$$

Inoltre si ha che $\mathrm{Ker}\,\delta^0 \subseteq \mathrm{Im}\epsilon$.

Infatti se $z = (\sigma_{i_0}) \in \mathrm{Ker}\,\delta^0$, allora soddisfa (37), quindi

$$\rho^{U_{i_1}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_1}) = \rho^{U_{i_0}}_{U_{i_0 i_1}}(\sigma_{i_0})$$

per ogni $i_0, i_1 \in I$. Ma allora, essendo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ ed essendo $\mathcal{F}$ un fascio esiste $\sigma \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ tale che $\rho^X_{U_{i_0}}(\sigma) = \sigma_{i_0}$ per ogni $i_0 \in I$ e pertanto $z = \epsilon(\sigma)$ e la (b) è dimostrata.

Per vedere la (c) osserviamo che, per (a) e (b), $\epsilon$ definisce un isomorfismo

$$\epsilon : \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{Ker}\,\delta^0 = \mathrm{Ker}\,\delta^0/\mathrm{Im}\delta^{-1} = \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}). \qquad \square$$

Il lemma precedente permette allora di costruire un complesso

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

che è esatto a livello 0.

Vediamo ora che, sotto un'opportuna condizione, è esatto anche a livello $i \geq 1$.

Questo sarà utile in seguito per costruire una risoluzione di $\mathcal{F}$ con gruppi di Cech.

**Lemma 14.6.** *Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Supponiamo che $U_s = X$ per qualche $s \in I$. Allora il complesso*

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

*è esatto.*

*Dimostrazione.* Dire che il complesso è esatto vuol dire che la sua coomologia è nulla per ogni $n \geq 0$, ovvero che

$$\mathrm{Ker}\,\delta^n \subseteq \mathrm{Im}\delta^{n-1} \text{ per ogni } n \geq 0. \tag{38}$$

dove abbiamo posto $\check{C}^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ e $\delta^{-1} = \epsilon$.

Per vedere questo c'è un metodo standard, che è quello di definire un "operatore di omotopia" ovvero un omomorfismo

$$h_n : \check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{n-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

tale che

$$h_{n+1} \circ \delta^n + \delta^{n-1} \circ h_n = \pm \mathrm{id}_{\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})} \text{ per ogni } n \geq 0. \tag{39}$$

Infatti (39) implica che se $z \in \operatorname{Ker} \delta^n$ allora

$$\pm z = \pm \mathrm{id}_{\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})}(z) = h_{n+1} \circ \delta^n(z) + \delta^{n-1} \circ h_n(z) = \delta^{n-1}(h_n(z))$$

e quindi $z \in \mathrm{Im}\delta^{n-1}$ e la (38) segue.

Ora dimostriamo la (39).

Se $n = 0$ e $z = (\sigma_{i_0}) \in \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0 \in I} \Gamma(U_{i_0},\mathcal{F})$ poniamo

$$h_0(z) = \sigma_s \in \Gamma(X,\mathcal{F}) = \check{C}^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Se $n \geq 1$ e $z = (\sigma_{i_0\ldots i_n}) \in \check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0<\ldots<i_n} \Gamma(U_{i_0\ldots i_n},\mathcal{F})$ poniamo

$$h_n(z) = (h_n(z)_{i_0\ldots i_{n-1}})$$

dove, per definire $h_n(z)_{i_0\ldots i_{n-1}}$ poniamo

$$h_n(z)_{i_0\ldots i_{n-1}} = 0 \text{ se } s \in \{i_0,\ldots,i_{n-1}\},$$

mentre se $s \notin \{i_0,\ldots i_{n-1}\}$ allora sia

$$j = |\{k \geq 0 : i_k < s\}| - 1$$

e in tal caso definiamo

$$h_n(z)_{i_0\ldots i_{n-1}} = (-1)^j \sigma_{i_0\ldots s\ldots i_{n-1}}.$$

Osserviamo che $\sigma_{i_0\ldots s\ldots i_{n-1}} \in \Gamma(U_{i_0\ldots s\ldots i_{n-1}},\mathcal{F}) = \Gamma(U_{i_0\ldots i_{n-1}},\mathcal{F})$ dato che $U_s = X$. Quindi anche $h_n(z)_{i_0\ldots i_{n-1}} \in \Gamma(U_{i_0\ldots i_{n-1}},\mathcal{F})$.

Per dimostrare (39) prendiamo $z = (\sigma_{i_0\ldots i_n}) \in \check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Calcoleremo $(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\ldots i_n}$, $(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\ldots i_n}$ e la loro somma, che, per dimostrare (39) dovrà essere $\pm\sigma_{i_0\ldots i_n}$.

Supponiamo prima che $s \in \{i_0,\ldots,i_n\}$, quindi $s = i_k$ per qualche $k \in \{0,\ldots,n\}$.

Si ha

$$(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\ldots i_n} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h_n(z)_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_n}.$$

Ora $h_n(z)_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_n} = 0$ se $p \neq k$, mentre $h_n(z)_{i_0\ldots\hat{i}_k\ldots i_n} = (-1)^{k-1}\sigma_{i_0\ldots s\ldots i_n} = (-1)^{k-1}\sigma_{i_0\ldots i_n}$ se $p = k$. Dunque, in questo caso

$$(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\ldots i_n} = (-1)^{2k-1}\sigma_{i_0\ldots i_n} = -\sigma_{i_0\ldots i_n}.$$

Invece, per definizione di $h_{n+1}$ si ha che $(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\ldots i_n} = 0$, quindi

$$(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\ldots i_n} + (\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\ldots i_n} = -\sigma_{i_0\ldots i_n}$$

e la (39) è dimostrata in questo caso.

Supponiamo ora che $s \notin \{i_0,\ldots,i_n\}$. Si ha

$$(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\ldots i_n} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h_n(z)_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_n} =$$

$$= \sum_{p=0}^{j} (-1)^p(-1)^{j-1}\sigma_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots s\ldots i_n} + \sum_{p=j+1}^{n} (-1)^p(-1)^j\sigma_{i_0\ldots s\ldots\hat{i}_p\ldots i_n}$$

dove nella prima somma abbiamo $j-1$ perché, essendo $p \leq j$, ci sono $j$ indici prima di $s$.

D'altra parte

$$(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\ldots i_n} = (-1)^j\delta^n(z)_{i_0\ldots s\ldots i_n} = (-1)^j\delta^n(z)_{i'_0\ldots i'_{n+1}}$$

dove abbiamo posto $i'_0 = i_0,\ldots,i'_j = i_j, i'_{j+1} = s, i'_{j+2} = i_{j+1}\ldots i'_{n+1} = i_n$.

Ne segue che

$$(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\dots i_n} = (-1)^j \delta^n(z)_{i'_0\dots i'_{n+1}} = (-1)^j \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \sigma_{i'_0\dots \hat{i}'_p \dots i'_n} =$$

$$= (-1)^j \sum_{p=0}^{j} (-1)^p \sigma_{i_0\dots \hat{i}_p \dots s \dots i_n} + (-1)^j (-1)^{j+1} \sigma_{i_0\dots i_n} + (-1)^j \sum_{p=j+2}^{n+1} (-1)^p \sigma_{i_0\dots s \dots \hat{i}_{p-1} \dots i_n}.$$

Ora sommiamo. Il primo termine

$$(-1)^j \sum_{p=0}^{j} (-1)^p \sigma_{i_0\dots \hat{i}_p \dots s \dots i_n}$$

in $(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\dots i_n}$ si cancella con il primo termine

$$\sum_{p=0}^{j} (-1)^p (-1)^{j-1} \sigma_{i_0\dots \hat{i}_p \dots s \dots i_n}$$

in $(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\dots i_n}$.

Il secondo termine in $(h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\dots i_n}$ si riscrive, ponendo $p' = p-1$, come

$$(-1)^j \sum_{p'=j+1}^{n} (-1)^{p'+1} \sigma_{i_0\dots s \dots \hat{i}_{p'} \dots i_n}$$

e quindi si cancella con il secondo termine

$$\sum_{p=j+1}^{n} (-1)^p (-1)^j \sigma_{i_0\dots s \dots \hat{i}_p \dots i_n}$$

in $(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\dots i_n}$.

Quindi abbiamo dimostrato che

$$(\delta^{n-1}(h_n(z)))_{i_0\dots i_n} + (h_{n+1}(\delta^n(z)))_{i_0\dots i_n} = (-1)^j (-1)^{j+1} \sigma_{i_0\dots i_n}$$

e la (39) è dimostrata. □

Ora vogliamo introdurre una versione fascificata del complesso precedente. Ciò determinerà una buona risoluzione di $\mathcal{F}$.

**Definizione 14.7.** Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Per ogni aperto $V$ di $X$ denotiamo con $V \cap \mathcal{U}$ il ricoprimento $\{V \cap U_i\}_{i\in I}$ di $V$. Sia $n \geq 0$ e sia $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il fascio definito ponendo

$$\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(V) = \check{C}^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}_{|V})$$

con gli omomorfismi di restrizione definiti in modo ovvio. Per ogni $n \geq 0$ sia

$$\delta^n : \check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

il morfismo definito per ogni aperto $V$ da

$$\delta^n_{V\cap\mathcal{U}} : \check{C}^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}_{|V}) \to \check{C}^{n+1}(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}_{|V}).$$

Ne segue facilmente che si ottiene un complesso di fasci

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \; 0 \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

Inoltre è definito un morfismo

$$\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon : \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

definedo, per ogni aperto $V$ di $X$ l'omomorfismo

$$\Gamma(V,\mathcal{F}) \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})(V) = \check{C}^0(V\cap\mathcal{U},\mathcal{F}_{|V}) = \prod_{i_0\in I}\Gamma(U_{i_0}\cap V,\mathcal{F})$$

che manda $\sigma\in\Gamma(V,\mathcal{F})$ in $(\rho^V_{U_{i_0}\cap V}(\sigma))$.

Ora vediamo che si ottiene una risoluzione.

Premettiamo prima però la seguente osservazione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Osservazione 14.8.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ un complesso di fasci di gruppi abeliani. Supponiamo che, per ogni $x\in X$, esiste un aperto $U$ contenente $x$ tale che per ogni aperto $V$ con $x\in V\subseteq U$ si ha che

$$\mathcal{F}(V)\to\mathcal{G}(V)\to\mathcal{H}(V)$$

è esatto. Allora il complesso $\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ è esatto.

Abbiamo

**Proposizione 14.9.** *Sia $X$ uno spazio topologico, sia $I$ un insieme totalmente ordinato, sia $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Allora il complesso*

$$0\to\mathcal{F}\to\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

*è una risoluzione di $\mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* Sia $x\in X$ e sia $U_i$ un aperto del ricoprimento che contiene $x$. Per ogni aperto $V$ tale che $x\in V\subseteq U_i$, si ha che $V\cap U_i=V$, quindi il ricoprimento $V\cap\mathcal{U}$ di $V$ soddisfa le ipotesi del Lemma 14.6 (con $X=V$). Ma allora il Lemma 14.6 implica che il complesso

$$0\to\Gamma(V,\mathcal{F})\to\check{C}^0(V\cap\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{C}^1(V\cap\mathcal{U},\mathcal{F})\to\dots$$

è esatto. Ma, per definizione, $\check{C}^n(V\cap\mathcal{U},\mathcal{F})=\Gamma(V,\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}))$, quindi il complesso

$$0\to\Gamma(V,\mathcal{F})\to\Gamma(V,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}))\to\Gamma(V,\check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))\to\dots$$

è esatto. Pertanto, per l'osservazione 14.8, il complesso $0\to\mathcal{F}\to\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ è esatto, dunque è una risoluzione di $\mathcal{F}$. □

Grazie ai risultati precedenti, nel caso degli schemi, potremo dimostrare che la coomologia di Cech (per un opportuno ricoprimento) e la coomologia dei fasci coincidono.

**Teorema 14.10.** *Sia $X$ uno schema e sia $\mathcal{U}=\{U_0,\dots,U_N\}$ un ricoprimento finito di $X$ con aperti affini tali che $U_{i_0\cdots i_n}\subseteq X$ è affine per ogni $i_0,\dots,i_n\in\{0,\dots,N\}$. Allora per ogni fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su $X$ e per ogni $n\geq 0$ si ha*

$$\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^n(X,\mathcal{F}).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la risoluzione

$$0\to\mathcal{F}\to\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

data dalla Proposizione 14.9. Dalla Proposizione 9.11 dedurremo che la tesi del teorema vale se dimostriamo che i fasci $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ sono aciclici, ovvero che

$$H^j(X,\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}))=0 \text{ per ogni } j\geq 1, n\geq 0. \tag{40}$$

Infatti, assumendo la (40), la Proposizione 9.11 da

$$H^n(X,\mathcal{F})\cong H^n(\Gamma(X,\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})))=H^n(\check{C}^\bullet(X\cap\mathcal{U},\mathcal{F})))=H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})))=\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Ora dimostriamo la (40). Iniziamo ad osservare che

$$\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong\bigoplus_{i_0<\cdots<i_n}{}_{U_{i_0\cdots i_n}}\mathcal{F}. \tag{41}$$

Infatti, per ogni aperto $V$ di $X$ si ha

$$\Gamma(V, \check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = \check{\mathcal{C}}^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}_{|V}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_n} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n} \cap V, \mathcal{F}).$$

Ma somma diretta e prodotto diretto coincidono nel caso di insieme di indici finito, quindi

$$\prod_{i_0 < \ldots < i_n} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n} \cap V, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{i_0 < \ldots < i_n} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n} \cap V, \mathcal{F}) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_n} \Gamma(V, {}_{U_{i_0 \ldots i_n}}\mathcal{F}) \cong \Gamma(V, \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_n} {}_{U_{i_0 \ldots i_n}}\mathcal{F}).$$

Quindi

$$\Gamma(V, \check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong \Gamma(V, \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_n} {}_{U_{i_0 \ldots i_n}}\mathcal{F})$$

e la (41) è dimostrata.

Ora per dimostrare la (40), dato che la coomologia commuta con la somma diretta, ci resta da dimostrare che

(42) $$H^j(X, {}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F}) = 0 \text{ per ogni } j \geq 1, n \geq 0.$$

L'idea ora è di usare il morfismo di inclusione $h_{i_0 \ldots i_n} : U_{i_0 \ldots i_n} \to X$ sfruttando il fatto che è affine.

Infatti preso il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_N\}$ di $X$ sappiamo che, per ogni $i \in \{0, \ldots, N\}$, si ha, posto $h = h_{i_0 \ldots i_n}$,

$$h^{-1}(U_i) = U_{i_0 \ldots i_n} \cap U_i = U_{i_0 \ldots i_n i}$$

che è affine per ipotesi. Inoltre, più in generale, osserviamo che, se $U$ è un aperto di $X$ e $h : U \to X$ è l'inclusione, si ha

$${}_U\mathcal{F} = h_*(\mathcal{F}_{|U}).$$

Infatti per ogni aperto $V$ di $X$ si ha

$$({}_U\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathcal{F}_{|U}(U \cap V) = \mathcal{F}_{|U}(h^{-1}(V)) = h_*(\mathcal{F}_{|U})(V).$$

Ora noi dobbiamo dimostrare che

$$H^j(X, {}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F}) = 0$$

ovvero che

$$H^j(X, (h_{i_0 \ldots i_n})_*(\mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}})) = 0.$$

Ma sappiamo che il morfismo $h_{i_0 \ldots i_n} : U_{i_0 \ldots i_n} \to X$ è affine quindi il Teorema 13.21 implica che

$$H^j(X, (h_{i_0 \ldots i_n})_*(\mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}})) \cong H^j(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}}).$$

Infine il fascio $\mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}}$ è quasi-coerente (dato che $\mathcal{F}$ lo è ) e $U_{i_0 \ldots i_n}$ è affine, quindi il Teorema di Serre implica che $H^j(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}}) = 0$ per $j \geq 1$. Questo dimostra la (42) e conclude la dimostrazione del teorema. □

Abbiamo inoltre la seguente conseguenza.

**Corollario 14.11.** *Sia $X$ uno schema e sia $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_N\}$ un ricoprimento finito di $X$ con aperti affini tali che $U_{i_0 \cdots i_n} \subseteq X$ è affine per ogni $i_0, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, N\}$. Allora per ogni fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su $X$ si ha*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0 \textit{ per ogni } n \geq N + 1.$$

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ se $n \geq N+1$ e poi applicare il Teorema 14.10:

$$H^n(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0. \quad \square$$

Per opportuni schemi è immediata l'ipotesi del Teorema 14.10 e del Corollario 14.11.

**Osservazione 14.12.** Se $X$ è uno schema separato su uno schema affine, allora l'intersezione di due aperti affini di $X$ è affine (vedasi [H, Ex. II.4.3]).

Il prossimo obiettivo è ottenere $H^1(X, \mathcal{F})$ come limite di coomologia di Cech. Questo risultato che ci sarà utile nel seguito. Premettiamo

**Definizione 14.13.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X$. Un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ di $X$ si dice *un raffinamento di* $\mathcal{U}$ se esiste un'applicazione $\lambda : J \to I$ tale che $V_j \subseteq U_{\lambda(j)}$ per ogni $j \in J$.

**Osservazione 14.14.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $R$ l'insieme dei ricoprimenti aperti di $X$. Per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in R$ diremo che $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$.

Si vede facilmente che $(R, \leq)$ è un insieme pre-diretto (cioè che non soddisfa necessariamente l'antisimmetria) filtrante. Per tali insiemi si può definire il limite diretto allo stesso modo fatto nel caso degli insiemi diretti.

**Osservazione 14.15.** Siano $X$ uno spazio topologico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un raffinamento di $\mathcal{U}$. Per ogni fascio di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ su $X$ e per ogni $n \geq 0$ è indotto un omomorfismo

$$\lambda^n : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

tale che, se $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[dr] & \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ & \check{H}^n(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

*Dimostrazione.* Per ogni $j_0 < \ldots < j_n$ si ha

$$V_{j_0 \ldots j_n} = V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_n} \subseteq U_{\lambda(j_0)} \cap \ldots \cap U_{\lambda(j_n)} = U_{\lambda(j_0) \ldots \lambda(j_n)}$$

e questo definisce un omomorfismo

$$h_n : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

che manda $(\sigma_{i_0 \ldots i_n})_{i_0 < \ldots < i_n}$ in $(\rho^{U_{\lambda(j_0)\ldots\lambda(j_n)}}_{V_{j_0 \cdots j_n}}(\sigma_{\lambda(j_0)\ldots\lambda(j_n)}))_{j_0 < \ldots < j_n}$.

È facile vedere che questo induce un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "h_n"] & \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[d, "h_{n+1}"] \\ \check{C}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{V}}"] & \check{C}^{n+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

il quale, come è noto, induce un omomorfismo in coomologia

$$\lambda^n : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Si lascia per esercizio la verifica della commutatività del diagramma quando $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. $\square$

Ora abbiamo

**Lemma 14.16.** *Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su $X$. Allora si ha un isomorfismo*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

*Dimostrazione.* Daremo la dimostrazione nel caso compatto (si veda [H, Ex. III.4.4(c)] per il caso generale).

Consideriamo la risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci di Cech (Proposizione 14.9)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \dots .$$

Posto $\mathcal{G} = \operatorname{Coker}\varphi$ si ha $\mathcal{G} = \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})/\mathrm{Im}\varphi = \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})/\operatorname{Ker}\psi \hookrightarrow \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e quindi abbiamo due successioni esatte

$$0 \to \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{G} \to 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \dots .$$

Passando alla coomologia otteniamo il diagramma con righe e colonne esatte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
H^0(X,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f^0"'] & H^0(X,\mathcal{G}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & H^1(X,\mathcal{F}) \\
 & H^0(X,\check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})) \arrow[d, "f^1"] & \\
 & H^0(X,\check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U},\mathcal{F})) &
\end{tikzcd}$$

Ora $k$ è iniettiva, quindi $\mathrm{Im}g \cong \mathrm{Im}(k \circ g) = \mathrm{Im}f^0$ e $H^0(X,\mathcal{G}) \cong \mathrm{Im}k = \operatorname{Ker} f^1$, quindi

$$\operatorname{Coker} g = H^0(X,\mathcal{G})/\mathrm{Im}g \cong \operatorname{Ker} f^1/\mathrm{Im}f^0.$$

Inoltre, per definizione dei fasci $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ si ha

$$H^0(X,\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})) \cong \Gamma(X,\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})) = \check{C}^n(\mathcal{U}\cap X,\mathcal{F}) = \check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

quindi

$$\operatorname{Coker} g \cong \operatorname{Ker} f^1/\mathrm{Im}f^0 = \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Ora la successione esatta

$$H^0(X,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})) \xrightarrow{g} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{h} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{j} H^1(X,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

induce un'omomorfismo iniettivo, definito da $h$,

$$\gamma_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \operatorname{Coker} g \cong H^0(X,\mathcal{G})/\operatorname{Ker} h \hookrightarrow H^1(X,\mathcal{F}).$$

Passando al limite si ottiene un omomorfismo iniettivo,

$$\gamma : \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \hookrightarrow H^1(X,\mathcal{F}).$$

Dimostriamo che $\gamma$ è suriettivo.

Per ogni $\sigma \in H^1(X,\mathcal{F})$ la Proposizione 13.10 implica che esiste un ricoprimento finito $\mathcal{U} = \{U_{i_0}\}_{i_0\in I}$ di $X$ tale che

$$\sigma \in \operatorname{Ker}\{H^1(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{i_0\in I} H^1(X,{}_{U_{i_0}}\mathcal{F})\}.$$

Ma abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema 14.10 (vedasi (41)) che

$$\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{i_0\in I} {}_{U_{i_0}}\mathcal{F}.$$

quindi $\sigma \in \operatorname{Ker}\{H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}))\}$, ovvero, con la notazione precedente, $\sigma \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} h$. Pertanto $\sigma \in \operatorname{Im}\gamma_{\mathcal{U}}$ e questo dimostra che $\gamma$ è suriettivo. $\square$

## 15. Il Proj di un anello graduato

Introduciamo ora una costruzione simile allo spettro di un anello, il Proj. Questa parte è presa da [H, Cap. II, par. 2].

Ricordiamo le seguenti definizioni.

**Definizione 15.1.** Un *anello graduato* è un anello $S$ che ha una decomposizione $S = \bigoplus\limits_{d\geq 0} S_d$ in somma diretta di gruppi abeliani tali che $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$ per ogni $d \geq 0, e \geq 0$. Un elemento $f \in S$ si dice *omogeneo di grado* $d$ se $f \in S_d$. Un ideale $\mathfrak{a}$ di $S$ si dice *omogeneo* se $\mathfrak{a} = \bigoplus\limits_{d\geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$.

Un esempio standard di anello omogeneo è l'anello dei polinomi $P = k[x_0, \ldots, x_n]$, dove $k$ è un campo e dove $P_d$ è il gruppo dei polinomi omogenei di grado $d$.

Nel seguito utilizzeremo i seguenti fatti, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Osservazione 15.2.** Sia $S$ un anello graduato. Si ha

(a) Ogni $f \in S$ si scrive in modo unico come $f = f_0 + \ldots + f_d$ dove $f_i$ è omogeneo di grado $i$ per ogni $0 \leq i \leq d$.
(b) Un ideale $\mathfrak{a}$ di $S$ è omogeneo se e solo se è generato da elementi omogenei.
(c) Somma, prodotto, intersezione e radicale di un ideale omogeneo sono omogenei.
(d) Per verificare che un ideale omogeneo $\mathfrak{a} \subsetneq S$ è primo è sufficiente verificare che per ogni $f, g \in S$ omogenei e tali che $fg \in \mathfrak{a}$ si ha che $f \in \mathfrak{a}$ o $g \in \mathfrak{a}$.

**Definizione 15.3.** Sia $S$ un anello graduato. L'*ideale irrilevante di* $S$ è $S_+ = \bigoplus\limits_{d\geq 1} S_d$.

Questo ci permette di definire il Proj.

**Definizione 15.4.** Sia $S$ un anello graduato. Allora

$$X = \operatorname{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \text{ ideale primo omogeneo di } S \text{ tale che } \mathfrak{p} \not\supseteq S_+\}.$$

Utilizzeremo la seguente notazione, per distinguere i punti dell'insieme $X$ dagli ideali primi omogenei di $S$

**Definizione 15.5.** Sia $\mathfrak{p} \subset S$ un ideale primo omogeneo. Il punto di $X = \operatorname{Proj}(S)$ corrispondente a $\mathfrak{p}$ lo denoteremo con il simbolo $[\mathfrak{p}]$. Sia $x \in X$ un punto. L'ideale primo corrispondente a $x$ lo denoteremo con il simbolo $\mathfrak{p}_x$.

Daremo ora una topologia a $\operatorname{Proj}(S)$ in analogia al caso dello spettro.

**Definizione 15.6.** Sia $S$ un anello graduato e sia $\mathfrak{a} \subseteq S$ un ideale omogeneo. Sia

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in X = \operatorname{Proj}(S) : \mathfrak{p}_x \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

**Lemma 15.7.** *Sia $S$ un anello graduato e siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i, i \in I$ ideali omogenei. Allora*

(a) $V((1)) = \emptyset, V((0)) = \operatorname{Proj}(S)$*;*
(b) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$*;*
(c) $\bigcap\limits_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$.

*Dimostrazione.* Esercizio. $\square$

Come nel caso dello spettro, questo ci permette di definire una topologia.

**Definizione 15.8.** Sia $S$ un anello graduato. La *topologia di Zariski su* $X = \operatorname{Proj}(S)$ è quella che ha per chiusi i $V(\mathfrak{a})$ al variare dell'ideale omogeneo $\mathfrak{a}$. Sia $f \in S_d$ per qualche $d \geq 1$. L'*aperto principale associato a* $f$ è

$$D_+(f) = X \setminus V((f)) = \{x \in X : f \notin \mathfrak{p}_x\}.$$

Analogamente al caso affine si ha

**Lemma 15.9.** *Sia $S$ un anello graduato e sia $X = \mathrm{Proj}(S)$. Gli aperti principali sono una base della topologia di Zariski di $X$.*

*Dimostrazione.* Sia $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ un aperto di $X$ e sia $x \in U$. Allora $\mathfrak{p}_x$ è un ideale primo omogeneo tale che $\mathfrak{p}_x \not\supseteq S_+$ e $\mathfrak{p}_x \not\supseteq \mathfrak{a}$. Quindi esistono $g \in S_+$ e $h \in \mathfrak{a}$ tali che $g \notin \mathfrak{p}_x$ e $h \notin \mathfrak{p}_x$. Scomponendo $g$ ed $h$ in somma di elementi omogenei (Osservazione 15.2(a)), possiamo supporre che $g \in S_d, d > 0$ e $h \in S_e, e \geq 0$.

Sia $f = gh$. Allora $f$ è omogeneo di grado $d + e > 0$, $f \in \mathfrak{a}$ e $f \notin \mathfrak{p}_x$. Quindi $x \in D_+(f)$. Inoltre per ogni $y \in D_+(f)$ si ha che $f \notin \mathfrak{p}_y$, quindi $\mathfrak{p}_y \not\supseteq \mathfrak{a}$, altrimenti si avrebbe che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_y$ e quindi $f \in \mathfrak{p}_y$, contraddizione.

Ma allora $y \in X \setminus V(\mathfrak{a}) = U$. Quindi abbiamo dimostrato che $x \in D_+(f) \subseteq U$ e questo conclude la dimostrazione. □

Inoltre, come nel caso dello spettro si ha

**Osservazione 15.10.** Sia $S$ una anello graduato e siano $f, g \in S$ omogenei di grado positivo. Allora $D_+(g) \subseteq D_+(f)$ se e solo se esiste $b \in S$ omogeneo ed $s \geq 1$ tali che $g^s = bf$.

*Dimostrazione.* Supponiamo che esiste $b \in S$ omogeneo ed $s \geq 1$ tali che $g^s = bf$. Per ogni $x \in D_+(g)$ si ha che $g \notin \mathfrak{p}_x$, quindi $f \notin \mathfrak{p}_x$: se $f \in \mathfrak{p}_x$ allora $g^s = bf \in \mathfrak{p}_x$, quindi $g \in \mathfrak{p}_x$, contraddizione. Dunque $f \notin \mathfrak{p}_x$ e pertanto $x \in D_+(f)$. Quindi $D_+(g) \subseteq D_+(f)$.

Viceversa supponiamo che $D_+(g) \subseteq D_+(f)$. Per ogni ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ tale che $f \in \mathfrak{p}$, si ha che $[\mathfrak{p}] \notin D_+(g)$: se $[\mathfrak{p}] \in D_+(g)$ allora $[\mathfrak{p}] \in D_+(f)$, quindi $f \notin \mathfrak{p}$, contraddizione.

Allora $[\mathfrak{p}] \notin D_+(g)$, ovvero $[\mathfrak{p}] \in V(g)$, cioè $g \in \mathfrak{p}$. Utilizzando l'analogo omogeneo di [AM, Prop. 1.14] (esercizio) ne segue che

$$g \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ primo omog.} \\ \text{tale che } f \in \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \sqrt{(f)}$$

Quindi esiste $b \in S$ ed $s \geq 1$ tali che $g^s = bf$. Decomponendo $b$ in somma di elementi omogenei e uguagliando la parte di grado $s \deg(g)$ si ha che si può prendere $b$ omogeneo (dato che $g$ ed $f$ sono omogenei). □

Ora, come nel caso dello spettro, questo ci permette di definire un fascio strutturale su $X = \mathrm{Proj}(S)$ e di dargli una struttura di schema. Premettiamo le seguenti.

**Definizione 15.11.** Sia $S$ un anello graduato. Un *$S$-modulo graduato* è un $S$-modulo $M$ che ha una decomposizione $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ in somma diretta di gruppi abeliani tali che $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$ per ogni $d \geq 0, e \in \mathbb{Z}$. Per ogni $[\mathfrak{p}] \in \mathrm{Proj}(S)$ sia

$$M_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{m}{f} : m \in M, f \in S \setminus \mathfrak{p}, m, f \text{ omogenei dello stesso grado}\}.$$

Per ogni $f \in S_d, d > 0$ sia

$$M_{(f)} = \{\frac{m}{f^l} : m \in M_{ld}, l \geq 0\}.$$

Le frazioni $\frac{m}{f} \in M_{(\mathfrak{p})}$ e $\frac{m}{f^l} \in M_{(f)}$ si dicono frazioni di grado zero (il grado di una frazione è il grado del numeratore meno il grado del denominatore).

Ora possiamo definire il fascio associato ad $M$.

**Definizione 15.12.** Sia $S$ un anello graduato e sia $X = \mathrm{Proj}(S)$. Sia $M$ un $S$-modulo graduato. Per ogni aperto principale $D_+(f)$, $f \in S$ omogeneo di grado positivo, poniamo

$$\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) = M_{(f)}.$$

Per definire le restrizioni usiamo l'Osservazione 15.10: se $D_+(g) \subseteq D_+(f)$, esiste $b \in S$ omogeneo ed $s \geq 1$ tali che $g^s = bf$. Allora possiamo definire

$$\rho_g^f := \rho_{D_+(g)}^{D_+(f)} : M_{(f)} \longrightarrow M_{(g)}, \quad \frac{m}{f^l} \longmapsto \frac{b^l m}{g^{ls}}.$$

Osserviamo che

$$\deg(m) = l\deg(f) \text{ e } s\deg(g) = \deg(b) + \deg(f),$$

quindi

$$\deg(b^l m) = l\deg(b) + \deg(m) = l\deg(b) + l\deg(f) = ls\deg(g) = \deg(g^{ls}).$$

Quindi

$$\frac{b^l m}{g^{ls}} \in M_{(g)}.$$

Analogamente al caso dello spettro (Lemma 11.2), si ha

**Lemma 15.13.** *Sia $S$ un anello graduato, sia $X = \mathrm{Proj}(S)$ e sia $M$ un $S$-modulo graduato. Con le definizioni precedenti è definito un fascio $\widetilde{M}$ su $X$. Inoltre, posto $\mathcal{O}_X = \widetilde{S}$, si ha che $\widetilde{M}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.*

*Dimostrazione.* Esercizio. □

In realtà nel caso graduato, si possono definire grazie ad $M$ infiniti, con l'operazione di "twist".

**Definizione 15.14.** Sia $S$ un anello graduato, sia $X = \mathrm{Proj}(S)$ e sia $M$ un $S$-modulo graduato. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $M(n)$ l'$S$-modulo graduato

$$M(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_{d+n}.$$

Allora è definito il fascio $(\widetilde{M})(n) := \widetilde{M(n)}$. Il *fascio strutturale* $\mathcal{O}_X$ di $X$ è il fascio $\widetilde{S}$ e il fascio $\mathcal{O}_X(n)$ è $\widetilde{S(n)}$. Il fascio $\mathcal{O}_X(1)$ si dice *fascio twisting di Serre.*

Ora per concludere vediamo che la coppia $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ è uno schema.

**Lemma 15.15.** *Sia $S$ un anello graduato, sia $X = \mathrm{Proj}(S)$ e sia $M$ un $S$-modulo graduato.*

(a) *Per ogni $[\mathfrak{p}] \in X$ si ha $(\widetilde{M})_{[\mathfrak{p}]} \cong M_{(\mathfrak{p})}$;*
(b) *Per ogni $f \in S$ omogeneo di grado positivo si ha un isomorfismo di spazi localmente anellati*

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)}) \cong (\mathrm{Spec}(S_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})})$$

*(dove, come da convenzione, $\mathcal{O}_{D_+(f)} := (\mathcal{O}_X)_{|D_+(f)}$);*
(c) $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ *è uno schema;*
(d) $(\widetilde{M})_{|D_+(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}}$.
(e) $\widetilde{M}$ *è un fascio quasi-coerente su $X$.*

*Dimostrazione.* La (a) si dimostra come nel caso affine (Proposizione 11.4). La (c) segue dalla (a) e (b) e dal Lemma 15.9 per definizione di schema. La (d) si dimostra, usando la (b), come nel caso affine (Lemma 13.14). La (e) segue dalla (d) e dal Lemma 15.9 per definizione di fascio quasi-coerente.

Concludiamo dimostrando la (b).

Abbiamo un omomorfismo di anelli $S \to S_f$ ed inoltre abbiamo che $S_{(f)} \subset S_f$. Per ogni ideale omogeneo $\mathfrak{a}$ di $S$ definiamo

$$\varphi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}S_f) \cap S_{(f)}.$$

È facile vedere che questo definisce un'applicazione

$$\varphi : D_+(f) \to \operatorname{Spec}(S_{(f)})$$

che è biiettiva e tale che $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ se e solo se $\varphi(\mathfrak{p}) \supseteq \varphi(\mathfrak{a})$. Quindi $\varphi$ è un omeomorfismo. Osserviamo che per ogni $\frac{g}{f^n} \in S_{(f)}$ si ha che

$$\varphi^{-1}(U_{\frac{g}{f^n}}) = D_+(g).$$

Intanto possiamo assumere che

$$D_+(g) \subseteq D_+(f).$$

Infatti si ha $\frac{g}{f^n} = \frac{gf}{f^{n+1}}$ e se $g' := gf$, per l'Osservazione 15.10,

$$D_+(g') \subseteq D_+(f).$$

Ora

$$\varphi^{-1}(U_{\frac{g}{f^n}}) = \{[\mathfrak{p}] \in D_+(f) : \varphi(\mathfrak{p}) \in U_{\frac{g}{f^n}}\} = \{[\mathfrak{p}] \in D_+(f) : \frac{g}{f^n} \notin (\mathfrak{p}S_f) \cap S_{(f)}\}$$

Per mostrare che $\varphi^{-1}(U_{\frac{g}{f^n}}) = D_+(g)$ ci basta mostrare allora che

$$\frac{g}{f^n} \notin (\mathfrak{p}S_f) \cap S_{(f)} \text{ se e solo se } g \notin \mathfrak{p}$$

ovvero che, per ogni $[\mathfrak{p}] \in D_+(f)$ si ha

$$\frac{g}{f^n} \in (\mathfrak{p}S_f) \cap S_{(f)} \text{ se e solo se } g \in \mathfrak{p}. \tag{43}$$

Vediamo la (43).

Se $g \in \mathfrak{p}$ allora è ovvio che $\frac{g}{f^n} \in (\mathfrak{p}S_f) \cap S_{(f)}$. Viceversa supponiamo che $\frac{g}{f^n} \in (\mathfrak{p}S_f) \cap S_{(f)}$. Allora esiste $h \in \mathfrak{p}$ omogeneo e $m \geq 0$ tali che $\frac{g}{f^n} = \frac{h}{f^m}$ con $\deg(h) = m \deg(f)$. Ma allora esiste $q \geq 0$ tale che $f^q(gf^m - hf^n) = 0$ e quindi $f^{q+m}g = f^{q+n}h \in \mathfrak{p}$. Ma $f \notin \mathfrak{p}$, quindi $g \in \mathfrak{p}$. Questo dimostra la (43) e quindi che $\varphi^{-1}(U_{\frac{g}{f^n}}) = D_+(g)$.

Ora definiamo un morfismo

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})} \to \varphi_* \mathcal{O}_{D_+(f)}.$$

Come al solito lo facciamo sugli aperti principali.

Per ogni $\frac{g}{f^n} \in S_{(f)}$ tale che $D_+(g) \subseteq D_+(f)$ si ha, posto $d = \deg(f)$,

$$\Gamma(U_{\frac{g}{f^n}}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})}) = \Gamma(U_{(\frac{g}{f^n})^d}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})}) = \Gamma(U_{\frac{g^d}{f^{nd}}}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})}) = (S_{(f)})_{\frac{g^d}{f^{nd}}}$$

mentre

$$\Gamma(U_{\frac{g}{f^n}}, \varphi_*\mathcal{O}_{D_+(f)}) = \Gamma(\varphi^{-1}(U_{\frac{g}{f^n}}), \mathcal{O}_{D_+(f)}) = \Gamma(D_+(g), \mathcal{O}_{D_+(f)}) = \Gamma(D_+(g), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(S)}) = S_{(g)}.$$

Ora l'omomorfismo $\rho^f_g : S_{(f)} \to S_{(g)}$ induce un isomorfimo

$$(S_{(f)})_{\frac{g^d}{f^{nd}}} \xrightarrow{\cong} S_{(g)}$$

quindi un isomorfismo

$$\Gamma(U_{\frac{g}{f^n}}, \operatorname{Spec}(S_{(f)})) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U_{\frac{g}{f^n}}, \varphi_*\mathcal{O}_{D_+(f)}).$$

Questo dimostra la (b). $\square$

**Definizione 16.1.** Sia $r \geq 1$, sia $k$ un campo e sia $P = k[x_0, \ldots, x_r]$. Per ogni $d \geq 0$ sia $P_d = \{f \in P \text{ omogeneo di grado } d\}$ e sia $P_+ = \bigoplus_{d \geq 1} P_d = (x_0, \ldots, x_r)$. Lo *spazio proiettivo di dimensione $r$ su $k$* è lo schema

$$\mathbb{P}^r_k = \mathrm{Proj}(P) = \{\mathfrak{p} \text{ ideale primo omogeneo di } P \text{ tale che } \mathfrak{p} \not\supseteq P_+\}.$$

Sia $i \in \{0, \ldots, r\}$. L' *$i$-esimo aperto fondamentale* di $\mathbb{P}^r_k$ è $U_i = D_+(x_i) \subset \mathbb{P}^r_k = \mathrm{Proj}(P)$.

Da ora in poi scriveremo $\mathbb{P}^r$ sottintendendo che è assegnato un campo $k$.

**Osservazione 16.2.**

(a) $U_i$ è un aperto affine per ogni $0 \leq i \leq r$.
(b) Si ha un ricoprimento aperto affine $\mathbb{P}^r = U_0 \cup \ldots \cup U_r$.

*Dimostrazione.* (a) Per il Lemma 15.15(b) sappiamo che $U_i = D_+(x_i) \cong \mathrm{Spec}(P_{(x_i)})$ quindi $U_i$ è un aperto affine.

(b) Sia $[\mathfrak{p}] \in \mathbb{P}^r = \mathrm{Proj}(P)$. Allora $\mathfrak{p} \not\supseteq P_+ = (x_0, \ldots, x_r)$, quindi esiste $i \in \{0, \ldots, r\}$ tale che $x_i \notin \mathfrak{p}$. Dunque $[\mathfrak{p}] \in \mathrm{Proj}(P) \setminus V(x_i) = D_+(x_i) = U_i$. □

Essendo lo spazio proiettivo un Proj, sappiamo che possiede i fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q) = \widetilde{P(q)}, q \in \mathbb{Z}$.

Il nostro obiettivo sarà calcolare tutti i gruppi di coomologia di questi fasci. Anzi, come vedremo, li calcoleremo tutti in un colpo solo usando il fascio

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q).$$

(la somma diretta infinita è il fascio associato al prefascio somma diretta).

Per fare questo useremo la coomologia di Cech e il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$ degli aperti fondamentali di $\mathbb{P}^r$. Dovremo dunque calcolare i gruppi di Cech di $(\mathbb{P}^r, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ e poi la coomologia del complesso di Cech.

**Osservazione 16.3.**

(a) Per ogni $q \in \mathbb{Z}$ e per ogni $0 \leq i_0 < \ldots < i_n \leq r$ si ha

$$\Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = P(q)_{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})} = \left\{ \frac{f}{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})^s} : s \geq 0, f \in P_{q+s(n+1)} \right\}.$$

(b) Per ogni $q \in \mathbb{Z}$ e per ogni $0 \leq i_0 < \ldots i_n \leq r$ si ha

$$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} P(q)_{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})} = P_{x_{i_0} \cdots x_{i_n}}.$$

(c) Sia $\mathcal{F} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)$ e sia $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$. Allora

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > r, \\ \bigoplus_{0 \leq i_0 < \ldots < i_n \leq r} P_{x_{i_0} \cdots x_{i_n}} & \text{se } 0 \leq n \leq r. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* (a) Si ha

$$\Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = \Gamma(D_+(x_{i_0} \cdots x_{i_n}), \widetilde{P(q)}) = P(q)_{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})} = \left\{ \frac{f}{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})^s} : s \geq 0, f \in P(q)_{s(n+1)} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{f}{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})^s} : s \geq 0, f \in P_{q+s(n+1)} \right\}.$$

(b) Intanto è ovvio che

$$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} P(q)_{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{f}{(x_{i_0} \cdots x_{i_n})^s} : s \geq 0, f \in P_{q+s(n+1)} \right\} \subseteq P_{x_{i_0} \cdots x_{i_n}}.$$

Viceversa per ogni $\frac{f}{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})^s} \in P_{x_{i_0}\cdots x_{i_n}}$ sia $f = f_0 + \ldots + f_d$ con $f_j \in P_j$ e sia $q_j := j - s(n+1)$ per $0 \leq j \leq d$. Allora $P_j = P_{q_j+s(n+1)} = P(q_j)_{s(n+1)}$, quindi

$$\frac{f_j}{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})^s} \in P(q_j)_{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})}$$

e dunque

$$\frac{f}{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})^s} = \frac{f_0}{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})^s} + \ldots + \frac{f_d}{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})^s} \in \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} P(q)_{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})}.$$

Questo dimostra la (b). Per vedere la (c) osserviamo che $\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ se $n > r$ per definizione. Se $0 \leq n \leq r$ si ha, osservando che gli insiemi di indici sono finiti, e usando (a) e (b)

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} \Gamma(U_{i_0\ldots i_n}, \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = \bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \Gamma(U_{i_0\ldots i_n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) =$$

$$= \bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} P(q)_{(x_{i_0}\cdots x_{i_n})} = \bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} P_{x_{i_0}\cdots x_{i_n}}. \qquad \square$$

Come vedremo nel prossimo lemma, questi gruppi $\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ sono anche quelli di $(W_r, \widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})$, dove $W_r$ è un opportuno aperto di $\mathbb{A}^{r+1}$.

Iniziamo quindi a definire $(W_r, \widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})$ e a calcolare i gruppi di Cech e la loro coomologia.

**Lemma 16.4.** *Sia $r \geq 0$ e consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^{r+1} = \mathbb{A}_k^{r+1} = \operatorname{Spec}(P)$. Sia $O \in \mathbb{A}^{r+1}$ il punto corrispondente all'ideale primo $P_+$ di $P$. Sia $W = W_r = \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{O\}$. Allora:*

(a) *$W$ è aperto in $\mathbb{A}^{r+1}$.*

(b) *Si ha un ricoprimento aperto $W = U_{x_0} \cup \ldots \cup U_{x_r}$.*

(c) *Posto $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_{x_0}, \ldots, U_{x_r}\}$ si ha*

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \check{C}^n(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_W)$$

*dove $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$ è il ricoprimento degli aperti fondamentali di $\mathbb{P}^r$ e $\mathcal{F} = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)$.*

*Dimostrazione.* (a) Sappiamo dalla Proposizione 10.9 che $\overline{\{O\}} = V(P_+)$. Ma $P_+$ è massimale, quindi

$$\overline{\{O\}} = V(P_+) = \{x \in \operatorname{Spec}(P) : P_+ \subseteq \mathfrak{p}_x\} = \{x \in \operatorname{Spec}(P) : P_+ = \mathfrak{p}_x\} = \{O\}$$

e quindi $\{O\}$ è chiuso e $W = \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{O\}$ è aperto.

(b) Intanto, per ogni $i$, $x_i \in P_+ = (x_0, \ldots, x_r)$ quindi $O \in V(x_i)$, dunque $O \notin U_{x_i}$. Ne segue che $U_{x_i} \subset W = \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{O\}$ per ogni $i$. Ora per ogni $x \in W$ si ha che $\mathfrak{p}_x \not\supseteq P_+$: altrimenti $\mathfrak{p}_x \supseteq P_+$, quindi $\mathfrak{p}_x = P_+$ (dato che $P_+$ è massimale), ovvero $x = O$, contraddizione. Ma allora $\mathfrak{p}_x \not\supseteq P_+ = (x_0, \ldots, x_r)$, quindi esiste $i \in \{0, \ldots, r\}$ tale che $x_i \notin \mathfrak{p}_x$. Dunque $x \in U_{x_i}$ e questo mostra che $W = U_{x_0} \cup \ldots \cup U_{x_r}$, cioè la (b).

Per vedere la (c) osserviamo che $\check{C}^n(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_W) = 0$ se $n > r$ mentre, se $0 \leq n \leq r$ si ha, essendo l'insieme di indici finito,

$$\check{C}^n(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_W) = \prod_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} \Gamma(U_{x_{i_0}} \cap \ldots \cap U_{x_{i_n}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}}) =$$

$$= \bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} \Gamma(U_{x_{i_0}\cdots x_{i_n}}, \tilde{P}) = \bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_n\leq r} P_{x_{i_0}\cdots x_{i_n}} = \check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

per l'Osservazione 16.3(c). $\square$

Il lemma dice dunque che i gruppi di Cech di $(\mathbb{P}^r, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono anche quelli di $(W_r, \widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})$. Ora calcoliamo la coomologia di $(W_r, \widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})$.

**Teorema 16.5.** *Sia $k$ un campo, sia $r \geq 1$ e sia $W_r = \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{O\}$. Si ha:*

(i) $H^0(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong k[x_0, \dots, x_r]$;

(ii) $H^r(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong x_0^{-1} \cdots x_r^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_r^{-1}]$;

(iii) $H^j(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) = 0$ *se* $0 < j < r$.

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione di $P$-moduli

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} P_{x_r} \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p<0} k[x_0, \dots, x_{r-1}]x_r^p \longrightarrow 0 \tag{44}$$

dove $\alpha$ è la mappa standard $\alpha(f) = \frac{f}{1}$, che è iniettiva dato che $P$ è un dominio, mentre, per ogni $\frac{f}{x_r^s} \in P_{x_r}$, scriviamo $f = \sum\limits_{h=0}^{d} f_h(x_0, \dots, x_{r-1})x_r^h$ e poniamo

$$\beta(\frac{f}{x_r^s}) = \begin{cases} 0 & \text{se } s = 0, \\ \sum\limits_{0 \leq h \leq s-1: f_h \neq 0} f_h(x_0, \dots, x_{r-1})x_r^{h-s} & \text{se } d \geq s \geq 1 \\ \sum\limits_{0 \leq h \leq d: f_h \neq 0} f_h(x_0, \dots, x_{r-1})x_r^{h-s} & \text{se } d \leq s-1, s \geq 1 \end{cases}.$$

È facile vedere che la (44) è esatta (esercizio). Inoltre, passando ai fasci associati si ottiene la successione esatta ed esatta in sezioni globali (per il Lemma 13.11)

$$0 \longrightarrow \widetilde{P} \longrightarrow \widetilde{P_{x_r}} \longrightarrow \bigoplus_{p<0} k[x_0, \widetilde{\dots, x_{r-1}}]x_r^p \longrightarrow 0\ .$$

Ora sappiamo che $\widetilde{P} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}}, k[x_0, \widetilde{\dots, x_{r-1}}] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^r}$ mentre, per il Lemma 13.15,

$$\widetilde{P_{x_r}} \cong_{U_{x_r}} \widetilde{P} =_{U_{x_r}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}}$$

quindi la successione esatta precedente diventa

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}} \longrightarrow {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}} \longrightarrow \bigoplus_{p<0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^r} x_r^p \longrightarrow 0 \tag{45}$$

che è esatta anche in sezioni globali. Restringiamo ora la (45) a $W_r$. Intanto è facile vedere che, se $\mathcal{G}$ è un fascio su uno spazio topologico $X$ e $V \subseteq U \subseteq X$ sono aperti, allora

$$({}_V\mathcal{G})_{|U} \cong_V (\mathcal{G}_{|U})$$

quindi, restringendo la (45) a $W_r$ si ottiene la successione esatta di fasci quasi-coerenti

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{W_r} \longrightarrow {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r} \longrightarrow \bigoplus_{p<0} \mathcal{O}_{W_{r-1}} x_r^p \longrightarrow 0\ . \tag{46}$$

Osserviamo che se $h : U_{x_r} \hookrightarrow W_r$ è l'inclusione, allora, come nella dimostrazione del Teorema 14.10, si ha che

$${}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r} = h_* \mathcal{O}_{U_{x_r}}.$$

Inoltre $h$ è affine dato che $h^{-1}(U_{x_t}) = U_{x_t} \cap U_{x_r} = U_{x_t x_r}$ è affine per ogni $0 \leq t \leq r$, quindi, per il Teorema 13.21 si ha

$$H^j(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) = H^j(W_r, h_* \mathcal{O}_{U_{x_r}}) \cong H^j(U_{x_r}, \mathcal{O}_{U_{x_r}})$$

per ogni $j \geq 0$. Ora, essendo $U_{x_r} \cong \mathrm{Spec}(P_{x_r})$ affine (Lemma 10.13) si ha

$$H^0(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) \cong P_{x_r} \tag{47}$$

e, per il Teorema di Serre, essendo $\mathcal{O}_{U_{x_r}}$ quasi-coerente, si ha

$$H^j(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) = 0 \text{ per } j \geq 1. \tag{48}$$

Ora passiamo a dimostrare il teorema per induzione su $r$.

Supponiamo $r = 1$. Dobbiamo dimostare solo che
$(i)$ $H^0(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong k[x_0, x_1]$ e
$(ii)$ $H^1(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong x_0^{-1}x_1^{-1}k[x_0^{-1}, x_1^{-1}]$.
Dalla successione esatta (46) si ha la successione in coomologia

$$0 \to H^0(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \to H^0(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1}) \xrightarrow{\epsilon} \bigoplus_{p<0} H^0(W_0, \mathcal{O}_{W_0})x_1^p \to H^1(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \to H^1(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1})$$

Per la (48) sappiamo che $H^1(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1}) = 0$ e quindi

$$H^0(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong \operatorname{Ker}\epsilon \text{ e } H^1(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong \operatorname{Coker}\epsilon.$$

Ora calcoliamo la coomologia della successione esatta (45). Usando la (44) abbiamo che, essendo $P = k[x_0, x_1]$,

$$H^0(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) = P, \quad H^0(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1}) \cong P_{x_1} = H^0(\mathbb{A}^2{}_{,U_{x_1}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}).$$

Del resto $W_0 = U_{x_0}$ per il Lemma 16.4(b), quindi

$$H^0(W_0, \mathcal{O}_{W_0}) = k[x_0]_{x_0}.$$

Allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \longrightarrow H^0(\mathbb{A}^2{}_{,U_{x_1}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p<0} H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})x_1^p \longrightarrow 0$$

diventa

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P_{x_1} \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p<0} k[x_0]x_1^p \longrightarrow 0. \tag{49}$$

Usando le mappe (verticali) di restrizione a $W_1$ e $W_0$ abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \arrow[r] & H^0(\mathbb{A}^2{}_{,U_{x_1}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \bigoplus_{p<0} H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})x_1^p \arrow[d, "\gamma"] \\
& & H^0(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1}) \arrow[r, "\epsilon"] & \bigoplus_{p<0} H^0(W_0, \mathcal{O}_{W_0})x_1^p
\end{tikzcd}$$

nel quale la prima riga è la (49) mentre abbiamo già calcolato

$$H^0(W_{1,U_{x_1}}\mathcal{O}_{W_1}) \cong P_{x_1} = H^0(\mathbb{A}^2{}_{,U_{x_1}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$$

e

$$H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}) = k[x_0], H^0(W_0, \mathcal{O}_{W_0}) = k[x_0]_{x_0}.$$

Inoltre $\gamma$ è dato dalla mappa di localizzazione $k[x_0] \to k[x_0]_{x_0}$, quindi è iniettiva.
Deduciamo che il diagramma diventa

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & P_{x_1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{p<0} k[x_0]x_1^p \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
& & P_{x_1} \arrow[r, "\epsilon"] & \bigoplus_{p<0} k[x_0]_{x_0}x_1^p &
\end{tikzcd}.$$

Ne segue che

$$H^0(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong \operatorname{Ker}\epsilon \cong \operatorname{Ker}(\gamma \circ \beta) = \operatorname{Ker}\beta \cong P = k[x_0, x_1]$$

ovvero la (i) per $r = 1$. E deduciamo anche che

$$H^1(W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \cong \operatorname{Coker}\epsilon \cong \operatorname{Coker}(\gamma \circ \beta) \cong \operatorname{Coker}\gamma \cong x_0^{-1}x_1^{-1}k[x_0^{-1}, x_1^{-1}]$$

Questa è la (ii) del teorema ed il caso $r = 1$ è concluso.

Supponiamo ora $r \geq 2$. Vediamo di nuovo la successione in coomologia della (46):

(50)
$$0 \to H^0(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \to H^0(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) \xrightarrow{\epsilon} \bigoplus_{p<0} H^0(W_{r-1}, \mathcal{O}_{W_{r-1}})x_r^p \to H^1(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \to H^1(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r})$$

nella quale sappiamo che $H^1(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) = 0$ per (48) e che $H^0(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) \cong P_{x_r}$ per (47) mentre, per induzione, $H^0(W_{r-1}, \mathcal{O}_{W_{r-1}}) \cong k[x_0, \dots, x_{r-1}]$. Dunque la (50) diventa

$$0 \to H^0(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \to P_{x_r} \xrightarrow{\epsilon} \bigoplus_{p<0} k[x_0, \dots, x_{r-1}]x_r^p \to H^1(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \to 0$$

dalla quale deduciamo che

$$H^0(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong \operatorname{Ker} \epsilon$$

e

$$H^1(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong \operatorname{Coker} \epsilon.$$

Di nuovo paragoniamo con la successione esatta corrispondente per $\mathbb{A}^{r+1}$, che poi non è altro che la (44):

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} P_{x_r} \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p<0} k[x_0, \dots, x_{r-1}]x_r^p \longrightarrow 0$$

e come prima, usando le mappe (verticali) di restrizione a $W_r$ e $W_{r-1}$ abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\alpha"] & P_{x_r} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{p<0} k[x_0, \dots, x_{r-1}]x_r^p \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
 & & P_{x_r} \arrow[r, "\epsilon"] & \bigoplus_{p<0} k[x_0, \dots, x_{r-1}]x_r^p &
\end{tikzcd}$$

dal quale deduciamo che

$$H^0(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong \operatorname{Ker} \epsilon \cong P$$

e

$$H^1(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) = 0.$$

Infine sia $j \geq 2$. Dalla coomologia della (46)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{W_r} \longrightarrow {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r} \longrightarrow \bigoplus_{p<0} \mathcal{O}_{W_{r-1}} x_r^p \longrightarrow 0$$

usando (48), $H^{j-1}(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) = H^j(W_r, {}_{U_{x_r}}\mathcal{O}_{W_r}) = 0$ deduciamo che

$$\bigoplus_{p<0} H^{j-1}(W_{r-1}, \mathcal{O}_{W_{r-1}})x_r^p \cong H^j(W_r, \mathcal{O}_{W_r}).$$

Se $j < r$ abbiamo $j-1 < r-1$ quindi $H^{j-1}(W_{r-1}, \mathcal{O}_{W_{r-1}}) = 0$ per induzione e ne consegue che

$$H^j(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) = 0.$$

Infine se $j = r$ abbiamo $j - 1 = r - 1$ quindi per induzione

$$H^{j-1}(W_{r-1}, \mathcal{O}_{W_{r-1}}) = x_0^{-1} \cdots x_{r-1}^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}]$$

e ne consegue che

$$H^r(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong \bigoplus_{p<0} x_0^{-1} \cdots x_{r-1}^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}]x_r^p \cong x_0^{-1} \cdots x_r^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_r^{-1}]. \qquad \square$$

Prima di passare alla coomologia sugli spazi proiettivi registriamo la seguente conseguenza del Teorema 16.5.

**Corollario 16.6.** *Se $r \geq 1$ lo schema $W_r = \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{O\}$ non è affine.*

*Dimostrazione.* Se $W_r$ fosse affine si avrebbe, per il Teorema di Serre che

$$H^r(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) = 0$$

mentre sappiamo dal Teorema 16.5(ii) che

$$H^r(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \cong x_0^{-1} \cdots x_r^{-1} k[x_0^{-1}, \ldots, x_r^{-1}] \neq 0. \quad \square$$

Questo corollario generalizza quanto visto, per $r = 1$, nel corso di GE410.

Notiamo invece che, come visto nella dimostrazione del Teorema 16.5, $W_0$ è affine. Inoltre $W_r, r \geq 1$ fornisce un esempio di un aperto di uno schema affine che non è affine.

Ora calcoliamo la coomologia sullo spazio proiettivo.

**Teorema 16.7.** *Sia $k$ un campo, sia $r \geq 1$ e sia $q \in \mathbb{Z}$. Si ha:*

(i) $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = 0$ *se* $q < 0$.

(ii) $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = P_q = k[x_0, \ldots, x_r]_q$ *se* $q \geq 0$. *Quindi* $\dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = \binom{q+r}{r}$ *se* $q \geq 0$.

(iii) $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = 0$ *se* $q \geq -r$;

(iv) $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q))$ *è il $k$-spazio vettoriale generato dai monomi* $x_0^{i_0} \cdots x_r^{i_r}$ *con* $i_0 \leq 0, \ldots, i_r \leq 0$ *e* $\sum_{h=0}^{r} i_h = q + r + 1$, *se* $q \leq -r - 1$. *In particolare* $\dim H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = \binom{-q-1}{r}$ *se* $q \leq -r - 1$ *e* $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)) \cong k$.

(v) $H^j(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) = 0$ *per ogni* $q \in \mathbb{Z}$ *se* $0 < j < r$.

(vi) *La moltiplicazione definisce una forma bilineare non degenere*

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)) \times H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-q-r-1)) \to H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)) \cong k.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$ degli aperti fondamentali di $\mathbb{P}^r$. Osserviamo che $\mathcal{U}$ soddisfa le condizioni per calcolare la coomologia usando quella di Cech dato che le intersezioni finite in $\mathcal{U}$

$$U_{i_0,\ldots,i_n} = D_+(x_{i_0}) \cap \ldots \cap D_+(x_{i_n}) = D_+(x_{i_0} \cdots x_{i_n})$$

sono affini per il Lemma 15.15(b). Sia

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q).$$

Per il Teorema 14.10 sappiamo che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$H^n(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \cong \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})). \tag{51}$$

Ma il Lemma 16.4(c) asserisce che

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{C}^\bullet(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})$$

e dunque deduciamo che

$$H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong H^n(\check{C}^\bullet(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r})) = \check{H}^n(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r}). \tag{52}$$

Ricordando che $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_{x_0}, \ldots, U_{x_r}\}$ e che anche questo ricoprimento soddisfa, per lo stesso motivo, la condizione delle intersezioni finite, si ha, sempre per il Teorema 14.10,

$$\check{H}^n(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{W_r}) \cong H^n(W_r, \mathcal{O}_{W_r}). \tag{53}$$

Allora mettendo insieme (51), (52), (53) si ottiene che

$$H^n(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \cong H^n(W_r, \mathcal{O}_{W_r}) \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Il teorema segue ora dal Teorema 16.5 osservando che i gruppi di coomologia sono $P$-moduli graduati e uguagliando le parti omogenee di grado $q$. $\square$

Concludiamo osservando che gli spazi proiettivi costituiscono altri esempi di schemi non affini in quanto, per esempio, $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)) \neq 0$.

**Definizione 17.1.** Sia $k$ un campo. Uno *schema proiettivo su* $k$ è uno schema $X$ che possiede un'immersione chiusa $j : X \to \mathbb{P}^r_k$.

Nel seguito identificheremo uno schema proiettivo $X$ con la sua immagine $j(X)$ e scriveremo semplicemente $X \subseteq \mathbb{P}^r$ e $\mathcal{O}_X$ al posto di $j_*\mathcal{O}_X$. Questo abuso di notazione ha anche senso dato che, essendo $X$ chiuso in $\mathbb{P}^r$, allora $(j_*\mathcal{O}_X)_y = \{0\}$ per ogni $y \in \mathbb{P}^r \setminus X$: infatti se $U$ è un aperto di $\mathbb{P}^r$ tale che $y \in U \subseteq \mathbb{P}^r \setminus X$, si ha $j^{-1}(U) = \emptyset$, quindi $(j_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(j^{-1}(U)) = \{0\}$, dunque $(j_*\mathcal{O}_X)_y = \{0\}$. Inoltre è facile vedere che se $x \in X$ allora c'è un isomorfismo di anelli $(j_*\mathcal{O}_X)_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$: per ogni $\sigma_x \in (j_*\mathcal{O}_X)_x$ si ha che

$$\sigma \in (j_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(j^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(U \cap X)$$

per un certo aperto $U$ di $\mathbb{P}^r$ tale che $x \in U$. Allora $U \cap X$ è un aperto di $X$ contenente $x$ e

$$\sigma \in \mathcal{O}_X(U \cap X)$$

quindi questo dunque definisce anche un elemento $\sigma_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ che da luogo all'isomorfismo.

**Definizione 17.2.** Sia $X$ uno schema proiettivo e sia $j : X \to \mathbb{P}^r$ l'immersione chiusa corrispondente. Il *fascio di ideali* di $X$ è

$$\mathcal{I}_X := \operatorname{Ker}\{j^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to j_*\mathcal{O}_X\}.$$

In effetti per ogni aperto $U$ di $\mathbb{P}^r$ abbiamo un morfismo di anelli

$$j^\sharp(U) : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(U) \to j_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U \cap X)$$

e quindi $\mathcal{I}_X(U) = \operatorname{Ker} j^\sharp(U)$ è un ideale dell'anello $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(U)$.

Dunque se $X$ è uno schema proiettivo, abbiamo una succesione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow j_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

che però, con lo stesso abuso di notazione sopra, scriveremo

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0\ .$$

Come vedremo, allo stesso modo fatto con $\mathcal{O}_X$, se $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su $X$ lo possiamo estendere a un fascio quasi-coerente su $\mathbb{P}^r$, considerando $j_*\mathcal{F}$. Inoltre, essendo $j$ un morfismo affine (Osservazione 13.20), per il Teorema 13.21, hanno le stesse coomologie $H^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n(\mathbb{P}^r, j_*\mathcal{F})$. Quindi, per tutti gli asserti riguardanti la coomologia, potremo identificare $\mathcal{F}$ con $j_*\mathcal{F}$.

Si ha il seguente lemma tecnico, per la cui dimostrazione rimandiamo a [H, Cap. II, sez. 5].

**Lemma 17.3.** *Sia $X$ è uno schema proiettivo. Si ha*

(i) *Se $\mathcal{F}$ è quasi-coerente (risp. coerente) su $X$ allora $\mathcal{F}$ è quasi-coerente (risp. coerente) anche come fascio su $\mathbb{P}^r$.*

(ii) *Se un fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su $\mathbb{P}^r$ è della forma $\widetilde{M}$ per qualche $P$-modulo graduato $M$, allora per ogni $n_0 \in \mathbb{Z}$ si ha anche*

$$\mathcal{F} = \widetilde{(M_{\geq n_0})}$$

*dove $M_{\geq n_0} = \oplus_{n \geq n_0} M_n$.*

(iii) *$\mathcal{F}$ è coerente se e solo se $M_{\geq n_0}$ è finitamente generato per qualche $n_0$. Quindi in tal caso è possibile prendere $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ con $M$ finitamente generato.*

Il lemma permette di definire il fascio $\mathcal{F}(n)$ per ogni fascio quasi-coerente su uno schema proiettivo $X$: basta passare da $M$ a $M(n)$.

Grazie a questo lemma dimostreremo ora un altro teorema di Serre.

**Teorema 17.4.** (Teorema di Serre proiettivo)

*Sia $X$ uno schema proiettivo su un campo $k$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $X$. Allora:*

(a) *$H^i(X,\mathcal{F})$ è un $k$-spazio vettoriale di dimensione finita per ogni $i \geq 0$.*
(b) *Esiste $n_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $H^i(X,\mathcal{F}(n)) = 0$ per ogni $i > 0$ e per ogni $n \geq n_0$.*

*Dimostrazione.* Entrambi gli asserti sono sulla coomologia, quindi, come detto, possiamo assumere che $\mathcal{F}$ è un fascio coerente su $\mathbb{P}^r$. Per dimostrare (a) osserviamo intanto che, come è noto, $\mathbb{P}^r$ ha un ricoprimento aperto affine $\mathcal{U}$ con gli $r+1$ aperti fondamentali

$$\mathbb{P}^r = U_0 \cup \ldots \cup U_r.$$

Inoltre tale ricoprimento soddisfa la condizione dell'intersezione finita, quindi, per il Teorema 14.10,

$$H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \text{ per ogni } i \geq 0.$$

Ora se $i \geq r+1$ sappiamo che $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per il Corollario 14.11, quindi

$$H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) = 0 \text{ per ogni } i \geq r+1.$$

In particolare è un $k$-spazio vettoriale di dimensione finita, dunque soddisfa (a). Possiamo dunque supporre $i \leq r+1$.

Dimostriamo la (a) per induzione su $r+1-i \geq 0$.
Se $r+1-i = 0$ abbiamo $i = r+1$ e la (a) è soddisfatta.

Supponiamo ora $r+1-i \geq 1$.
Quindi $r+1-(i+1) < r+1-i$ e, per induzione, possiamo allora assumere che

$$H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}) \text{ soddisfa la (a)}$$

ovvero è un $k$-spazio vettoriale di dimensione finita per ogni fascio coerente $\mathcal{G}$ su $\mathbb{P}^r$.

Ora $\mathcal{F}$ è coerente, quindi, per il Lemma 17.3(iii), esiste un $P$-modulo finitamente generato $M$ tale che $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Siano $m_1, \ldots, m_s$ generatori di $M$, che possiamo supporre omogenei (scomponendoli in componenti omogenee) e sia $d_h \in \mathbb{Z}$ tale che $m_h \in M_{d_h}$ per ogni $h = 1, \ldots, s$. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $m \in M_n$ esistono $f_h \in P_{n-d_h}$, $1 \leq h \leq s$, tali che

$$m = f_1 m_1 + \ldots + f_s m_s.$$

Pertanto è definito un omomorfismo suriettivo di $P$-moduli graduati

$$\gamma : \bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h) \to M$$

al modo seguente: per ogni $(g_1, \ldots, g_s) \in \bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h)$ poniamo

$$\gamma(g_1, \ldots, g_s) = g_1 m_1 + \ldots + g_s m_s.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $m \in M_n$ sappiamo che esiste $(f_1, \ldots, f_s) \in \bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h)_n$ tale che

$$m = f_1 m_1 + \ldots + f_s m_s = \gamma(f_1, \ldots, f_s)$$

ovvero che $\gamma_n : \bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h)_n \to M_n$ è suriettiva per ogni $n$.

Dunque $\gamma$ è suriettiva. Posto $K = \operatorname{Ker} \gamma$, abbiamo una successione esatta di $P$-moduli graduati

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h) \xrightarrow{\gamma} M \longrightarrow 0\,. \tag{54}$$

Ora $P$ è noetheriano e $\bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h)$ è finitamente generato come $P$-modulo (è generato da $(1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)$), quindi, per [AM, Prop. 6.5], $\bigoplus_{h=1}^{s} P(-d_h)$ è un mo-dulo noetheriano (cioè soddisfa la condizione della catena ascendente sui sottomoduli), ma allora, per [AM, Prop. 6.2], $K$ è finitamente generato. Passando ai fasci coerenti associati la successione esatta (54) diventa

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \bigoplus_{h=1}^{s} \widetilde{P(-d_h)} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0\ .$$

Sappiamo che $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e, per definizione, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h) = \widetilde{P(-d_h)}$. Quindi posto $\mathcal{G} = \widetilde{K}$ si ha una successione esatta di fasci coerenti

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \bigoplus_{h=1}^{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0\ . \tag{55}$$

Passiamo alla coomologia. Si ha una successione esatta

$$\bigoplus_{h=1}^{s} H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h)) \to H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}). \tag{56}$$

e sappiamo dal Teorema 16.7 che tutti gli $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h))$ sono $k$-spazio vettoriali di dimensione finita. Del resto sapevamo per induzione che $H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G})$ è un $k$-spazio vettoriale di dimensione finita e quindi, per (56), anche $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$ lo è. Questo dimostra la (a).

Per vedere la (b) ricordiamo che $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq r+1$ e per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$, quindi in particolare $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ per ogni $i \geq r+1$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dunque la (b) vale, in questo caso, per ogni $n_0 \in \mathbb{Z}$. Possiamo quindi supporre $0 < i \leq r+1$.

Dimostriamo la (b) per induzione su $r+1-i \geq 0$.
Se $r+1-i = 0$ abbiamo $i = r+1$ e la (b) è soddisfatta per qualsiasi $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Supponiamo ora $r+1-i \geq 1$, dunque $0 < i \leq r$.
Quindi $r+1-(i+1) < r+1-i$ e, per induzione, possiamo allora assumere che esiste un $n_0' \in \mathbb{Z}$ tale che

$$H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}(n)) = 0 \text{ per ogni } n \geq n_0'.$$

Consideriamo la successione esatta (55).

Sia $n_0'' = \max\{d_h - r, 1 \leq h \leq s\}$ e sia $n \geq n_0''$, quindi $n \geq d_h - r$ per ogni $h$. Per il Teorema 16.7 si ha che $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n-d_h)) = 0$ per ogni $i > 0$:

infatti ciò segue dalla (v) del Teorema 16.7 se $i < r$ e dalla (iii) se $i = r$. Ma è facile vedere che c'è anche una successione esatta, indotta dalla (55)

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(n) \longrightarrow \bigoplus_{h=1}^{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h+n) \longrightarrow \mathcal{F}(n) \longrightarrow 0\ .$$

Sia $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$. Per ogni $n \geq n_0$ allora si ha la successione esatta

$$0 = \bigoplus_{h=1}^{s} H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d_h+n)) \to H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(n)) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}(n)) = 0$$

e quindi $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(n)) = 0$ per ogni $n \geq n_0$. Questo dimostra la (b) e quindi il teorema. □

## 18. Fasci invertibili

Inizieremo ora a studiare dei particolari fasci coerenti, che, come vedremo, saranno i protagonisti nel seguito.

**Definizione 18.1.** Sia $X$ uno schema e sia $\mathcal{F}$ un fascio di $O_X$-moduli. Diremo che $\mathcal{F}$ è *localmente libero di rango* $r$ se $X$ possiede un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ tale che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esista un isomorfismo

$$\varphi_U : \mathcal{F}_{|U} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_U^r.$$

Un *fascio invertibile (o un line bundle)* su $X$ è un fascio localmente libero di rango uno.

È chiaro che per assegnare un fascio localmente libero occorre assegnare un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$, dei fasci $\mathcal{G}_U$ su ogni $U \in \mathcal{U}$ e degli isomorfismi $\mathcal{G}_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_U^r$. Il prossimo risultato ci garantisce come globalizzare questi dati locali.

**Lemma 18.2.** (Lemma di incollamento)

*Sia $X$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto. Supponiamo assegnato un fascio $\mathcal{F}_i$ su $U_i$ per ogni $i \in I$, e degli isomorfismi*

$$\varphi_{ij} : \mathcal{F}_{j|U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{i|U_{ij}} \text{ per ogni } i, j \in I$$

*in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:*

(a) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_i}$*, per ogni* $i \in I$ *e*

(b) $\varphi_{ik|U_{ijk}} = \varphi_{ij|U_{ijk}} \circ \varphi_{jk|U_{ijk}}$ *per ogni* $i, j, k \in I$.

*Allora, esiste un fascio $\mathcal{F}$ su $X$ dotato di isomorfismi $\varphi_i : \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ per ogni $i \in I$ (detti isomorfismi di transizione) tali che*

$$\varphi_{ij} = \varphi_{i|U_{ij}} \circ (\varphi_{j|U_{ij}})^{-1} \text{ per ogni } i, j \in I.$$

*Inoltre il fascio $\mathcal{F}$ insieme agli isomorfismi $\varphi_i$ sono determinati a meno di isomorfismo unico.*

*Dimostrazione.* Iniziamo col dimostrare l'esistenza del fascio $\mathcal{F}$.

Per ogni aperto $U$ di $X$ definiamo

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \{(\sigma_i) \in \prod_{i \in I} \Gamma(U_i \cap U, \mathcal{F}_i) : (*) \ \varphi_{ij}(U_{ij} \cap U) \circ \rho^{U_j \cap U}_{U_{ij} \cap U}(\sigma_j) = \rho^{U_i \cap U}_{U_{ij} \cap U}(\sigma_i), \ \forall i, j \in I\}$$

e se $V \subseteq U$ è un altro aperto definiamo la restrizione $\rho^U_V : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ come

$$^{\mathcal{F}}\rho^U_V((\sigma_i)_{i \in I}) = (\rho^{U_i \cap U}_{U_i \cap V}(\sigma_i))_{i \in I}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{F}$ è un fascio.

Sia $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ un ricoprimento aperto e siano $\sigma_\alpha \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{F})$ tali che

$$^{\mathcal{F}}\rho^{V_\alpha}_{V_{\alpha\beta}}(\sigma_\alpha) = {}^{\mathcal{F}}\rho^{V_\beta}_{V_{\alpha\beta}}(\sigma_\beta), \ \forall \alpha, \beta \in A \tag{57}$$

dove, come al solito, $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta$. Allora

$$\sigma_\alpha = (\sigma_{\alpha i}) \in \prod_{i \in I} \Gamma(U_i \cap V_\alpha, \mathcal{F}_i), \quad \sigma_\beta = (\sigma_{\beta i}) \in \prod_{i \in I} \Gamma(U_i \cap V_\beta, \mathcal{F}_i)$$

e la condizione (57) è equivalente a

$$\rho^{U_i \cap V_\alpha}_{U_i \cap V_{\alpha\beta}}(\sigma_{\alpha i}) = \rho^{U_i \cap V_\beta}_{U_i \cap V_{\alpha\beta}}(\sigma_{\beta i}), \ \forall \ \alpha, \beta \in A, i \in I. \tag{58}$$

Per ogni $i \in I$ c'è un ricoprimento aperto $U_i \cap U = \bigcup_{\alpha \in A} U_i \cap V_\alpha$ e $\mathcal{F}_i$ è un fascio, quindi dalla (58) deduciamo che esiste $\tau_i \in \Gamma(U_i \cap U, \mathcal{F}_i)$ tale che $\rho^{U_i \cap U}_{U_i \cap V_\alpha}(\tau_i) = \sigma_{\alpha i}$. Ora verifichiamo che $\tau = (\tau_i)_{i \in I} \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, cioè che verifica $(*)$.

Dato che $\sigma_\alpha = (\sigma_{\alpha i}) \in \prod_{i \in I} \Gamma(U_i \cap V_\alpha, \mathcal{F}_i)$, sappiamo che

$$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap V_\alpha) \circ \rho^{U_j \cap V_\alpha}_{U_{ij} \cap V_\alpha}(\sigma_{\alpha j}) = \rho^{U_i \cap V_\alpha}_{U_{ij} \cap V_\alpha}(\sigma_{\alpha i})$$

da cui, sostituendo $\sigma_{\alpha i} = \rho^{U_i\cap U}_{U_i\cap V_\alpha}(\tau_i)$ si ottiene che

$$\varphi_{ij}(U_{ij}\cap V_\alpha)\circ\rho^{U_j\cap V_\alpha}_{U_{ij}\cap V_\alpha}(\rho^{U_j\cap U}_{U_j\cap V_\alpha}(\tau_j)) = \rho^{U_i\cap V_\alpha}_{U_{ij}\cap V_\alpha}(\rho^{U_i\cap U}_{U_i\cap V_\alpha}(\tau_i))$$

ovvero che

$$\varphi_{ij}(U_{ij}\cap V_\alpha)\circ\rho^{U_j\cap U}_{U_{ij}\cap V_\alpha}(\tau_j) = \rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap V_\alpha}(\tau_i) \tag{59}$$

Ma nei ricoprimenti aperti $U_{ij}\cap U = \bigcup_{\alpha\in A} U_{ij}\cap V_\alpha$ le sezioni $\rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap V_\alpha}(\tau_i)$ si incollano a $\rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap U}(\tau_i)$ quindi la condizione (59) è equivalente a

$$\varphi_{ij}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^{U_j\cap U}_{U_{ij}\cap U}(\tau_j) = \rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap U}(\tau_i),\ \forall i,j\in I.$$

che è appunto la condizione $(*)$. Quindi $\tau = (\tau_i)_{i\in I}\in\Gamma(U,\mathcal{F})$.

Infine, ovviamente, per ogni $\alpha\in A$ si ha

$$\rho^U_{V_\alpha}(\tau) = \rho^U_{V_\alpha}((\tau_i)_{i\in I}) = (\rho^{U_i\cap U}_{U_i\cap V_\alpha}(\tau_i))_{i\in I} = (\sigma_{\alpha i})_{i\in I} = \sigma_\alpha$$

e pertanto $\mathcal{F}$ è un fascio.

Costruiamo ora degli isomorfismi $\varphi_i : \mathcal{F}_{|U_i}\to\mathcal{F}_i$ per ogni $i\in I$.

Sia $U\subseteq U_i$ un aperto e definiamo

$$\varphi_i(U) : \Gamma(U,\mathcal{F}_{|U_i})\to\Gamma(U,\mathcal{F}_i),\quad (\sigma_h)_{h\in I}\mapsto\sigma_i$$

Ora costruiamo un'inversa.

Per ogni $k\in I$ sia $\psi_k : \mathcal{F}_k\to\mathcal{F}_{|U_k}$ definita, per ogni aperto $U\subseteq U_k$ da

$$\psi_k(U)(\sigma) = (\sigma_i)_{i\in I} \text{ dove } \sigma_i = \varphi_{ik}(U_i\cap U)\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma).$$

Iniziamo a verificare che $\psi_k(U)(\sigma)\in\Gamma(U,\mathcal{F})$, ovvero che soddisfa $(*)$.

Per ogni $i,j\in I$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^{U_j\cap U}_{U_{ij}\cap U}(\sigma_j) &= \varphi_{ij}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^{U_j\cap U}_{U_{ij}\cap U}\circ\varphi_{jk}(U_j\cap U)\circ\rho^U_{U_j\cap U}(\sigma) =\\ &= \varphi_{ij}(U_{ij}\cap U)\circ\varphi_{jk}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^{U_j\cap U}_{U_{ij}\cap U}\circ\rho^U_{U_j\cap U}(\sigma) = \varphi_{ik}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^U_{U_{ij}\cap U}(\sigma)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la condizione (b) su $U_{ij}\cap U\subseteq U_{ij}\cap U_k = U_{ijk}$.

D'altro canto

$$\rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap U}(\sigma_i) = \rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap U}\circ\varphi_{ik}(U_i\cap U)\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma) = \varphi_{ik}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^{U_i\cap U}_{U_{ij}\cap U}\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma) = \varphi_{ik}(U_{ij}\cap U)\circ\rho^U_{U_{ij}\cap U}(\sigma)$$

ovvero lo stesso risultato ottenuto sopra. Quindi la $(*)$ è verificata.

Ora dimostriamo che $\psi_k$ è l'inversa di $\varphi_k$ per ogni $k\in I$.

Se $U\subseteq U_k$ è un aperto e $\sigma\in\mathcal{F}_k(U)$ si ha

$$\varphi_k\circ\psi_k(\sigma) = \varphi_k((\sigma_i)_{i\in I}) = \sigma_k$$

dove, per definizione di $\psi_k$, si ha, applicando la (a), cioè $\varphi_{kk} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_k}$ e il fatto che $U_k\cap U = U$,

$$\sigma_k = \varphi_{kk}(U_k\cap U)\circ\rho^U_{U_k\cap U}(\sigma) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_k}(U)\circ\rho^U_U(\sigma) = \sigma.$$

Dall'altro lato, se $(\sigma_i)_{i\in I}\in\Gamma(U,\mathcal{F})$ si ha, sempre per definizione di $\psi_k$,

$$\psi_k\circ\varphi_k(\sigma) = \psi_k(\sigma_k) = (\varphi_{ik}(U_i\cap U)\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma_k))_{i\in I}. \tag{60}$$

Ma sappiamo che $(\sigma_i)_{i\in I}$ soddisfa la $(*)$, che, posto $j = k$ è

$$\varphi_{ik}(U_{ik}\cap U)\circ\rho^{U_k\cap U}_{U_{ik}\cap U}(\sigma_k) = \rho^{U_i\cap U}_{U_{ik}\cap U}(\sigma_i)$$

che però, essendo $U\subseteq U_k$, si ha $U_k\cap U = U$ e $U_{ik}\cap U = U_i\cap U$ e quindi si riscrive come

$$\varphi_{ik}(U_i\cap U)\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma_k) = \rho^{U_i\cap U}_{U_i\cap U}(\sigma_i) = \sigma_i$$

e quindi, riprendendo la (60) si ha

$$\psi_k\circ\varphi_k(\sigma) = (\varphi_{ik}(U_i\cap U)\circ\rho^U_{U_i\cap U}(\sigma_k))_{i\in I} = (\sigma_i)_{i\in I} = \sigma$$

e questo dimostra che $\varphi_k$ è un isomorfismo per ogni $k$.

Ora dimostriamo che $\varphi_{ij} = \varphi_{i|U_{ij}} \circ (\varphi_{j|U_{ij}})^{-1}$, ovvero che, per ogni aperto $U \subseteq U_{ij}$ si ha

$$\varphi_{ij}(U) = \varphi_i(U) \circ \psi_j(U)$$

come mappe da $\mathcal{F}_j(U)$ a $\mathcal{F}_i(U)$.

Se $\sigma \in \mathcal{F}_j(U)$ si ha

$$\varphi_i(U) \circ \psi_j(U)(\sigma) = \varphi_i(U)((\sigma_h)_{h \in I}) = \sigma_i$$

dove, per definizione di $\psi_j$, si ha che

$$\sigma_i = \varphi_{ij}(U_i \cap U) \circ \rho^U_{U_i \cap U}(\sigma).$$

Ma $U \subseteq U_{ij} \subset U_i$, quindi si ottiene che

$$\varphi_i(U) \circ \psi_j(U)(\sigma) = \sigma_i = \varphi_{ij}(U) \circ \rho^U_U(\sigma) = \varphi_{ij}(U)(\sigma)$$

che è esattamente quello che volevamo dimostrare. Questo conclude la dimostrazione dell'esistenza di $\mathcal{F}$. Ora dimostriamo l'unicità.

Sia $\mathcal{G}$ un fascio su $X$ dotato di isomorfismi $\gamma_i : \mathcal{G}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ tali che $\varphi_{ij} = \gamma_{i|U_{ij}} \circ (\gamma_{j|U_{ij}})^{-1}$ per ogni $i, j \in I$. Allora vengono univocamente determinati degli isomorfismi

$$\varphi_i^{-1} \circ \gamma_i : \mathcal{G}_{|U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U_i}$$

e su $U_{ij}$ si ha

$$\varphi_i^{-1} \circ \gamma_i = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \gamma_j = \varphi_j^{-1} \circ \gamma_j$$

e quindi gli isomorfismi $\varphi_i^{-1} \circ \gamma_i$ si incollano dando luogo ad un isomorfismo $\delta : \mathcal{G} \cong \mathcal{F}$. Infine per ogni isomorfismo $\epsilon : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ che rispetta i $\varphi_i$ c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{|U_i} \arrow[r, "\epsilon_{|U_i}"] \arrow[dr, "\gamma_i"'] & \mathcal{F}_{|U_i} \arrow[d, "\varphi_i"] \\
 & \mathcal{F}_i
\end{tikzcd}$$

dal quale deduciamo che $\epsilon_{|U_i} = \varphi_i^{-1} \circ \gamma_i$ per ogni $i \in I$ e quindi $\epsilon = \delta$, ovvero l'isomorfismo è univocamente determinato dai dati $\{\mathcal{F}_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. $\square$

Concludiamo con delle osservazioni ed un esempio sui fasci invertibili.

**Osservazione 18.3.** Sia $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su uno schema $X$. Allora esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e, per ogni $i, j \in I$ degli isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}$$

che soddisfano le (a) e (b) del Lemma di incollamento (Lemma 18.2).

*Dimostrazione.* Per definizione di fascio invertibile esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e degli isomorfismi $\varphi_i : \mathcal{L}_{|U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}$. Per ogni $i, j \in I$ abbiamo isomorfismi

$$\mathcal{O}_{U_{ij}} = \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}} \xrightarrow{(\varphi_{j|U_{ij}})^{-1}} (\mathcal{L}_{|U_j})_{|U_{ij}} = \mathcal{L}_{|U_{ij}} = (\mathcal{L}_{|U_i})_{|U_{ij}} \xrightarrow{\varphi_{i|U_{ij}}} \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} = \mathcal{O}_{U_{ij}}$$

ovvero

$$\varphi_{ij} = \varphi_{i|U_{ij}} \circ (\varphi_{j|U_{ij}})^{-1}$$

che soddisfano (a) e (b) dato che su $U_{ii} = U_i$ si ha

$$\varphi_{ii} = \varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{U_i}}$$

e su $U_{ijk}$ si ha

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_k^{-1} = \varphi_{ik}. \quad \square$$

In realtà gli isomorfismi di transizione possono essere visti come mappe di moltiplicazione per funzioni invertibili, al modo seguente.

**Definizione 18.4.** Sia $A$ un anello. Denoteremo con $A^*$ l'insieme degli elementi invertibili di $A$. Sia $f \in A$. La *mappa di moltiplicazione per* $f$ è la mappa $\varphi_f : A \to A$ definita da $\varphi_f(a) = af$ per ogni $a \in A$.

Notiamo che $A^*$ è un gruppo moltiplicativo. Inoltre $\varphi_f$ è un omomorfismo di $A$-moduli. Si ha

**Osservazione 18.5.** Siano $A$ e $B$ due anelli. Allora

(a) Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo, è definito un omomorfismo di gruppi $\varphi^* : A^* \to B^*$.

(b) C'è una corrispondenza biunivoca

$$\Phi : \{\text{isomorfismi } A \to A \text{ di } A - \text{moduli}\} \to A^*$$
$$(\varphi : A \to A) \mapsto \varphi(1).$$

(c) Per ogni isomorfismo di $A$-moduli $\varphi : A \to A$, esiste un unico elemento $u \in A^*$ tale che $\varphi = \varphi_u$.

*Dimostrazione.* Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, per definizione si ha che $\varphi(1) = 1$, quindi in particolare, $\varphi^* := \varphi_{|A^*} : A^* \to B^*$: se $u \in A^*$ allora

$$1 = \varphi(1) = \varphi(uu^{-1}) = \varphi(u)\varphi(u^{-1})$$

da cui $\varphi(u) \in B^*$. Questo dimostra (a). Ora sia $\varphi : A \to A$ un isomorfismo di $A$-moduli (N.B. Non di anelli commutativi unitari, quindi non manda necessariamente 1 in 1). Dato che $\varphi$ è suriettiva, esiste $a \in A$ tale che $1 = \varphi(a) = \varphi(a1) = a\varphi(1)$, quindi $\varphi(1) \in A^*$. Questo dimostra che $\Phi$ è definita. Ora ne costruiamo un'inversa. Dato $u \in A^*$, sia $\varphi_u$ la mappa di moltiplicazione per $u$. Verifichiamo che si tratta di un isomorfismo di $A$-moduli. Se $\varphi_u(a) = 0$ allora $au = 0$, quindi $a = auu^{-1} = 0u^{-1} = 0$, quindi $\varphi_u$ è iniettiva. Inoltre $\varphi_u$ è suriettiva dato che, se $b \in A$ allora

$$\varphi_u(bu^{-1}) = bu^{-1}u = b.$$

Quindi $\varphi_u$ è un isomorfismo di $A$-moduli e possiamo definire

$$\Psi : A^* \to \{\text{isomorfismi } A \to A \text{ di } A - \text{moduli}\}$$
$$u \mapsto \varphi_u.$$

Ed è ovvio che $\Phi$ e $\Psi$ sono una l'inversa dell'altra:

$$\Psi(\Phi(\gamma)) = \Psi(\gamma(1)) = \varphi_{\gamma(1)} = \gamma$$

dato che, per ogni $a \in A$ si ha

$$\varphi_{\gamma(1)}(a) = a\gamma(1) = \gamma(a1) = \gamma(a).$$

E del resto

$$\Phi(\Psi(u)) = \Phi(\varphi_u) = \varphi_u(1) = u.$$

Questo dimostra la (b) e anche la (c) dato che $\Psi$ è biiettiva. □

Prima di tornare ai fasci invertibili diamo la seguente

**Definizione 18.6.** Sia $X$ uno schema. Sia $\mathcal{O}_X^*$ il fascio di gruppi abeliani (moltiplicativi) definito da

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X^*) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^*$$

per ogni aperto $U$ di $X$, con restrizioni $(\rho_V^U)^*$ per ogni inclusione di aperti $V \subseteq U$.

Per esempio se $\mathcal{O}_X$ è il fascio delle funzioni regolari su una varietà $X$, allora $\mathcal{O}_X^*$ è il fascio delle funzioni regolari (su un aperto $U$) che non si annullano in alcun punto (di $U$).

Tornando ai fasci invertibili, si ha, per l'Osservazione 18.3, che se $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su uno schema $X$ allora esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e, per ogni $i, j \in I$ degli isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli $\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}$ quindi, in particolare, esistono degli isomorfismi di $\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}})$-moduli

$$\varphi_{ij}(U_{ij}) : \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}})$$

che, per l'Osservazione 18.5 (c) sono mappe di moltiplicazione per certi

$$f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{U_{ij}}) = \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}})^*.$$

**Definizione 18.7.** Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su uno schema $X$. Le $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*_X)$ si dicono *funzioni di transizione* di $\mathcal{L}$.

Il Lemma di incollamento (Lemma 18.2) ci permette anche di vedere il viceversa dell'Osservazione 18.3 e di costruire un fascio invertibile in base alle sue funzioni di transizione.

**Osservazione 18.8.** Per assegnare un fascio invertibile su uno schema $X$ è sufficiente dare un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $X$ e per ogni $i, j \in I$ un isomorfismo di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}$$

in modo che le condizioni (a) e (b) del Lemma di incollamento (Lemma 18.2) siano verificate.

*Dimostrazione.* L'osservazione segue banalmente dal Lemma di incollamento (Lemma 18.2) e dalla definizione di fascio invertibile.

Posto $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{U_i}$ (cosa che, del resto, a meno di isomorfismo, è l'unica cosa possibile per dare un fascio invertibile $\mathcal{L}$), dobbiamo dare degli isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli

$$\varphi_{ij} : \mathcal{L}_{j|U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{i|U_{ij}}$$

ovvero degli isomorfismi $\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}}$ ovvero degli isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}$$

tali che (a) e (b) siano verificate. □

**Osservazione 18.9.** Per assegnare un fascio invertibile $\mathcal{L}$ su uno schema $X$ è sufficiente dare un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $X$ e delle sezioni

$$f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{U_{ij}}), i, j \in I$$

tali che $f_{ii} = 1$ per ogni $i \in I$ e $f_{ik|U_{ijk}} = f_{ij|U_{ijk}} f_{jk|U_{ijk}}$ per ogni $i, j, k \in I$.

*Dimostrazione.* Supponiamo sia dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $X$ e delle sezioni $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{U_{ij}}), i, j \in I$ tali che $f_{ii} = 1$ per ogni $i \in I$ e $f_{ik|U_{ijk}} = f_{ij|U_{ijk}} f_{jk|U_{ijk}}$ per ogni $i, j, k \in I$. Ora le $f_{ij}$ determinano degli isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{ij}}$-moduli

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}$$

definiti, per ogni aperto $U \subseteq U_{ij}$, dagli isomorfismi

$$\varphi_{ij}(U) = \text{moltiplicazione per } (\rho^{U_{ij}}_U)^*(f_{ij}).$$

È facile ora vedere che le condizioni soddisfatte dalle $f_{ij}$ implicano che le $\varphi_{ij}$ soddisfano le (a) e (b) del Lemma di incollamento (Lemma 18.2). Quindi, per l'Osservazione 18.8, è assegnato un fascio invertibile su $X$. □

Concludiamo questa sezione con un esempio.

**Esempio 18.10.** Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^r$ e il suo ricoprimento aperto $\mathbb{P}^r = U_0 \cup \ldots \cup U_r$ (dove ricordiamo che $\mathbb{P}^r = \mathrm{Proj}(P) = \mathrm{Proj}(k[x_0, \ldots, x_r])$ e $U_i = D_+(x_i)$).

Per ogni $q \in \mathbb{Z}$ vediamo quali sono le funzioni di transizione del fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(q)$: dobbiamo dare, per ogni $i, j \in I = \{0, \ldots, r\}$, degli elementi invertibili in

$$\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) = \Gamma(D_+(x_i x_j), \widetilde{P}) = P_{(x_i x_j)}.$$

Consideriamo gli elementi $f_{ij} = \frac{x_j^q}{x_i^q}$. Per la precisione, se $q \geq 0$ sia

$$\frac{x_j^q}{x_i^q} := \frac{x_j^{2q}}{(x_i x_j)^q} \in P_{(x_i x_j)}.$$

Questo elemento è invertibile in $P_{(x_i x_j)}$ in quanto

$$\frac{x_j^{2q}}{(x_i x_j)^q} \frac{(x_i x_j)^q x_i^{2q}}{(x_i x_j)^{2q}} = 1$$

e anche $\frac{(x_i x_j)^q x_i^{2q}}{(x_i x_j)^{2q}} \in P_{(x_i x_j)}$, quindi $\frac{x_j^q}{x_i^q}$ è invertibile.

Analogamente si procede nel caso $q \leq 0$ definendo

$$\frac{x_j^q}{x_i^q} := \frac{x_i^{-2q}}{(x_i x_j)^{-q}} \in P_{(x_i x_j)}.$$

## 19. Il gruppo di Picard

Introdurremo ora una struttura di gruppo nell'insieme dei fasci invertibili (modulo isomorfismo).

Iniziamo con la seguente

**Osservazione 19.1.** Siano $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ due fasci invertibili su uno schema $X$. Allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di $X$ tale che $\mathcal{L}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{L}'_{|U_i}$ per ogni $i \in I$.

*Dimostrazione.* Siano $\{V_i\}_{i \in I}, \{W_j\}_{j \in J}$ due ricoprimenti aperti di $X$ tali che $\mathcal{L}_{|V_i} \cong \mathcal{O}_{V_i}$ e $\mathcal{L}'_{|W_j} \cong \mathcal{O}_{W_j}$ per ogni $i \in I, j \in J$. Allora sul ricoprimento aperto $\{V_i \cap W_j\}_{i \in I, j \in J}$ si ha che

$$\mathcal{L}_{|V_i \cap W_j} \cong \mathcal{O}_{V_i \cap W_j} \cong \mathcal{L}'_{|V_i \cap W_j}. \quad \square$$

Questo ci permette di definire il prodotto.

**Definizione 19.2.** Siano $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ due fasci invertibili su uno schema $X$. Il *prodotto tensoriale di $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$*, denotato con $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$ o anche con $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ è il fascio invertibile con funzioni di transizione (su un ricoprimento come nell'Osservazione 19.1)

$$f_{ij} f'_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{U_{ij}}), i, j \in I$$

dove le $f_{ij}$ sono le funzioni di transizione di $\mathcal{L}$ e $f'_{ij}$ quelle di $\mathcal{L}'$. L'*inverso di $\mathcal{L}$* è il fascio invertibile $\mathcal{L}^{-1}$ con funzioni di transizione

$$f_{ij}^{-1} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{U_{ij}}), i, j \in I.$$

Segue banalmente dalla definizione che l'insieme delle classi di isomorfismo $[\mathcal{L}]$ di fasci invertibili su $X$ è dotato di una struttura di gruppo abeliano in cui la moltiplicazione è indotta dall'operazione di prodotto tensoriale, l'elemento neutro è la classe $[\mathcal{O}_X]$ e l'inverso di $[\mathcal{L}]$ è $[\mathcal{L}^{-1}]$.

**Definizione 19.3.** Sia $X$ uno schema. Il *gruppo di Picard di $X$*, denotato con $\operatorname{Pic}(X)$, è il gruppo delle classi di isomorfismo $[\mathcal{L}]$ di fasci invertibili su $X$.

Per descrivere $\operatorname{Pic}(X)$ è necessario poter descrivere la classe di isomorfismo di un dato fascio invertibile. A tale scopo utilizzeremo il seguente

**Lemma 19.4.** *Sia $X$ uno schema e siano $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$ due fasci invertibili su $X$ definiti, rispetto ad uno stesso ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, da funzioni di transizione $f_{ij}$ e $g_{ij}$ rispettivamente. Allora $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ se e solo se esistono degli elementi $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*_{U_i})$ tali che su $U_{ij}$ si ha*

$$g_{ij} = a_i^{-1} f_{ij} a_j, \quad \forall i, j \in I. \tag{61}$$

*Dimostrazione.* Siano $\varphi_i : \mathcal{L}_{|U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}$ e $\psi_i : \mathcal{M}_{|U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}$ gli isomorfismi associati ad $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$. Sia $\rho : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}$ un isomorfismo e sia, per ogni $i \in I$

$$\gamma_i = \varphi_i \circ \rho_{|U_i} \circ \psi_i^{-1}.$$

Allora su $U_{ij}$ si ha, ricordando che $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ e $\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$,

$$\gamma_i^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \gamma_j = \psi_i \circ \rho^{-1} \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \rho \circ \psi_j^{-1} = \psi_i \circ \psi_j^{-1} = \psi_{ij}.$$

Ne segue che

$$\psi_{ij} = \gamma_i^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \gamma_j, \quad \forall i, j \in I. \tag{62}$$

Siano ora $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^*)$ tali che $\gamma_i(U_i)$ è la moltiplicazione per $a_i$. Ma $\varphi_{ij}$ è la moltiplicazione per $f_{ij}$ e $\psi_{ij}$ è la moltiplicazione per $g_{ij}$. Usando (62) su $U_{ij}$ si ha

$$g_{ij} = \psi_{ij}(U_{ij})(1) = \gamma_i(U_{ij})^{-1} \circ \varphi_{ij}(U_{ij}) \circ \gamma_j(U_{ij})(1) = a_i^{-1} f_{ij} a_j$$

ovvero la (61).

Viceversa supponiamo che le $a_i$ che soddisfano (61) esistono.

Per ogni aperto $U \subseteq U_i$ sia $\gamma_i(U)$ la moltiplicazione per $(\rho_U^{U_i})^*(a_i)$. Questo definisce un isomorfismo

$$\gamma_i : \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}.$$

Per ogni $i \in I$ definiamo l'isomorfismo:

$$\rho_i : \mathcal{M}_{|U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{|U_i}$$

ponendo

$$\rho_i = \varphi_i^{-1} \circ \gamma_i \circ \psi_i.$$

Allora, usando (61) si vede subito, come prima, che vale la (62). Dunque su $U_{ij}$ si ha

$$\rho_i = \varphi_i^{-1} \circ \gamma_i \circ \psi_i = (\varphi_{ij} \circ \varphi_j)^{-1} \circ \gamma_i \circ \psi_{ij} \circ \psi_j = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_{ij}^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \gamma_j \circ \psi_j = \varphi_j^{-1} \circ \gamma_j \circ \psi_j = \rho_j.$$

Pertanto le $\rho_i$ si incollano ad un isomorfismo $\rho : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}$. □

Il lemma ci permette di dimostrare il seguente

**Teorema 19.5.** *Sia $X$ uno schema. Si ha un isomorfismo*

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

*Dimostrazione.* Daremo la dimostrazione nel caso compatto (si veda [H, Ex. III.4.5] per il caso generale).

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e calcoliamo

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Ker}\, \delta^1 / \mathrm{Im} \delta^0.$$

Ricordiamo che $\mathcal{O}_X^*$ è un fascio di gruppi abeliani moltiplicativi quindi le definizioni useranno il prodotto. Si ha

$$\delta^0 : \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*) \to \prod_{i<j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*) = \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$$

dove, se $z = (\sigma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$, allora $\delta^0(z) = (\delta^0(z)_{ij})_{i<j}$ tali che su $U_{ij}$ si ha

$$\delta^0(z)_{ij} = \sigma_j \sigma_i^{-1}.$$

Mentre

$$\delta^1 : \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \prod_{i<j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*) \to \prod_{i<j<k} \Gamma(U_{ijk}, \mathcal{O}_X^*) = \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$$

dove se $z = (\sigma_{ij})_{i<j} \in \prod_{i<j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*)$ si ha $\delta^1(z) = (\delta^1(z)_{ijk})$ tali che su $U_{ijk}$ si ha

$$\delta^1(z)_{ijk} = \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1} \sigma_{ij}$$

In particolare $z \in \mathrm{Ker}\, \delta^1$ se e solo se $\sigma_{jk}\sigma_{ik}^{-1}\sigma_{ij} = 1$ per ogni $i < j < k, i, j, k \in I$ ovvero se e solo se $\sigma_{ik} = \sigma_{jk}\sigma_{ij}$ per ogni $i < j < k, i, j, k \in I$. Definiamo $\sigma_{ii} = 1$ per ogni $i \in I$ e se $i, j \in I : j < i$ definiamo $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^{-1}$. Ne segue banalmente che valgono le

$$\sigma_{ii} = 1 \text{ per ogni } i \in I \text{ e } \sigma_{ik} = \sigma_{jk}\sigma_{ij} \text{ per ogni } i, j, k \in I. \tag{63}$$

Allora dato $[z] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \operatorname{Ker}\delta^1/\operatorname{Im}\delta^0$ abbiamo $z = (\sigma_{ij})$ con $\sigma_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^*)$ tali che le (63) sono soddisfatte, quindi, per l'Osservazione 18.9, è definito un fascio invertibile $\mathcal{L}_z$ su $X$ con funzioni di transizione $\sigma_{ij}$.

Questo definisce un omomorfismo di gruppi abeliani

$$f_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \operatorname{Ker}\delta^1/\operatorname{Im}\delta^0 \to \operatorname{Pic}(X)$$
$$[z] \mapsto [\mathcal{L}_z].$$

Dobbiamo però mostrare che $f_{\mathcal{U}}$ è ben definito.

Se $z, z' \in \operatorname{Ker}\delta^1$ sono tali che $[z] = [z']$, allora $z^{-1}z' \in \operatorname{Im}\delta^0$ quindi se $z' = (\sigma'_{ij})$ si ha che

$$\sigma_{ij}^{-1}\sigma'_{ij} = \tau_j\tau_i^{-1}$$

per certi $\tau_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$. Ma allora

$$\sigma'_{ij} = \tau_j\sigma_{ij}\tau_i^{-1} = \tau_i^{-1}\sigma_{ij}\tau_j$$

e quindi, per il Lemma 19.4, si ha che $\mathcal{L}_z \cong \mathcal{L}_{z'}$, dunque $[\mathcal{L}_z] = [\mathcal{L}_{z'}]$ e $f_{\mathcal{U}}$ è ben definito.

Inoltre $f_{\mathcal{U}}$ è iniettivo: sia $[z] \in \operatorname{Ker} f_{\mathcal{U}}$, ovvero $z = (\sigma_{ij})$ e $[\mathcal{L}_z] = [\mathcal{O}_X]$. Allora $\mathcal{L}_z \cong \mathcal{O}_X$, quindi, per il Lemma 19.4, esistono $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^*)$ tali che su $U_{ij}$ si ha (ricordando che le funzioni di transizione di $\mathcal{O}_X$ sono $g_{ij} = 1$)

$$1 = a_i^{-1}\sigma_{ij}a_j, \quad \forall i, j \in I.$$

Ma allora $\sigma_{ij} = a_i a_j^{-1}$ e posto $b_i = a_i^{-1}$ si ha $\sigma_{ij} = b_i^{-1}b_j$ da cui $z \in \operatorname{Im}\delta^0$ e pertanto $[z] = 0$. Per l'Osservazione 18.9 per ogni $[\mathcal{L}] \in \operatorname{Pic}(X)$ esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e delle funzioni di transizione $f_{ij}$ di $\mathcal{L}$ tali che $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$ su $U_{ijk}$ per ogni $i, j, k \in I$. Ma allora $[\mathcal{L}] = [\mathcal{L}_z] = f_{\mathcal{U}}([z])$ dove $z = (f_{ij}) \in \operatorname{Ker}\delta^1$. Questo dimostra che c'è un isomorfismo

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Pic}(X).$$

Ma sappiamo dal Lemma 14.16 che

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema. □

## 20. Divisori di Cartier

Premettiamo la seguente

**Osservazione 20.1.**

(a) Sia $A$ un anello ridotto. Se $\operatorname{Spec}(A)$ è irriducibile allora $A$ è un dominio.
(b) Sia $X$ uno schema ridotto ed irriducibile e sia $\eta \in X$ il suo punto generico. Allora $\mathcal{O}_{X,\eta}$ è un campo e per ogni aperto affine $V \cong \operatorname{Spec}(A)$ di $X$ si ha che $\mathcal{O}_{X,\eta} \cong Q(A)$.
(c) Per ogni aperto $U$ di $X$ c'è un'inclusione $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$.

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in A$ tali che $fg = 0$. Allora

$$\operatorname{Spec}(A) = V(0) = V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

quindi, essendo $\operatorname{Spec}(A)$ irriducibile, possiamo assumere che $\operatorname{Spec}(A) = V(f)$. Ma allora, usando [AM, Prop. 1.7], si ha

$$f \in \bigcap_{x \in \operatorname{Spec}(A)} p_x = \{\text{nilpotenti di } A\} \cup \{0\}.$$

Essendo $A$ ridotto si deduce che $f = 0$. Quindi $A$ è un dominio e la (a) è dimostrata.

Sia ora $X$ uno schema ridotto ed irriducibile, sia $\eta \in X$ il suo punto generico e sia $V \cong \mathrm{Spec}(A)$ un aperto affine. Dato che $\eta$ è denso si ha che $\eta \in V$. Essendo $X$ irriducibile, si ha che $V$ è irriducibile e, essendo $X$ ridotto, si ha che $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ è ridotto. Ma

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \Gamma(V, \mathcal{O}_{X|V}) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \cong A.$$

Dunque $A$ è ridotto e dalla (a) segue che $A$ è un dominio. Quindi $(0)$ ed $\eta$ sono punti generici di $V$ e ne segue dalla Proposizione 10.9, che $\eta = (0)$. Ma allora, per l'esempio 2, sezione 11,

$$\mathcal{O}_{X,\eta} \cong \mathcal{O}_{V,(0)} = Q(A)$$

quindi $\mathcal{O}_{X,\eta}$ è campo e la (b) è dimostrata.

Sia ora $U$ un aperto di $X$ e consideriamo l'omomorfismo

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$$
$$\sigma \mapsto \sigma_\eta.$$

Mostriamo che è iniettivo. Questo darà la (c).

Supponiamo $\sigma_\eta = 0$ e sia $\{V_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto affine di $X$. Se $V_i \cong \mathrm{Spec}(A_i)$, allora, come sopra, $A_i$ è un dominio per ogni $i \in I$. Per ogni $i \in I$ tale che $U \cap V_i \neq \emptyset$ si ha $\eta \in U \cap V_i$ (perché $\eta$ è denso). Ma allora anche $\rho^U_{U\cap V_i}(\sigma)_\eta = 0$. Ricoprendo $U \cap V_i$ con aperti non vuoti $U_f$, $f \in A_i$, si ha $f \neq 0$ e abbiamo, analogamente, $\rho^{U\cap V_i}_{U_f}(\sigma)_\eta = 0$. Ma

$$\rho^{U\cap V_i}_{U_f}(\sigma) \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_{U_f}) \cong (A_i)_f$$

e la mappa $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_{U_f}) \to \mathcal{O}_{U_f,\eta}$ non è altro che la mappa $(A_i)_f \to Q(A_i)$, che è iniettiva, quindi $\rho^{U\cap V_i}_{U_f}(\sigma) = 0$ per ogni $f$ e ne segue che $\rho^U_{U\cap V_i}(\sigma) = 0$ per ogni $i \in I$, quindi $\sigma = 0$. $\square$

Ora possiamo dare la seguente

**Definizione 20.2.** Sia $X$ uno schema ridotto ed irriducibile e sia $\eta \in X$ il suo punto generico. Il campo $K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ si dice *campo delle funzioni razionali di* $X$. I fasci costanti (di gruppi abeliani moltiplicativi) $\mathcal{K}_X$ e $\mathcal{K}^*_X$ sono i fasci definiti, per ogni aperto $\emptyset \neq U \subseteq X$, da

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) = K(X) \text{ e } \Gamma(U, \mathcal{K}^*_X) = K(X)^*$$

con restrizioni $\mathrm{id}_{K(X)}$ e $\mathrm{id}_{K(X)^*}$ rispettivamente.

Osserviamo in particolare che sono fasci fiacchi. Inoltre, per l'Osservazione 20.1(c) c'è un'inclusione $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{K}_X$ e, di conseguenza, un'inclusione $\mathcal{O}^*_X \hookrightarrow \mathcal{K}^*_X$.

**Definizione 20.3.** Sia $X$ uno schema ridotto ed irriducibile. Un *divisore di Cartier* su $X$ è una sezione globale del fascio $\mathcal{K}^*_X/\mathcal{O}^*_X := \mathrm{Coker}\{\mathcal{O}^*_X \hookrightarrow \mathcal{K}^*_X\}$ ovvero un elemento di $\Gamma(X, \mathcal{K}^*_X/\mathcal{O}^*_X)$. Un divisore di Cartier si dice *principale* se appartiene all'immagine di $\Gamma(X, \mathcal{K}^*_X) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^*_X/\mathcal{O}^*_X)$. Il gruppo (abeliano) dei divisori di Cartier su $X$ si denota con $\mathrm{Car}(X)$, in cui l'operazione verrà denotata additivamente. Il sottogruppo costituito dai divisori principali si denoterà con $\mathrm{Pr}(X)$. Due divisori di Cartier $D_1, D_2$ si dicono *linearmente equivalenti* se $D_1 - D_2$ è principale; in tal caso scriveremo $D_1 \sim D_2$.

La seguente osservazione, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio, è spesso molto utile.

**Osservazione 20.4.** Ogni divisore di Cartier può essere individuato assegnando un opportuno ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ e, per ogni $i \in I$, un $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*_X)$, in modo che per ogni $i, j \in I$ si abbia $f_i f_j^{-1} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_X)$. Diremo che il divisore è definito da $\{\mathcal{U}, f_i\}$.

**Definizione 20.5.** Un divisore di Cartier si dice *effettivo* se in qualche ricoprimento $\mathcal{U}$ è definito da $\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)\}$.

Si ha il seguente risultato, che mostra che il gruppo di Picard si identifica con il gruppo delle classi di equivalenza lineare di divisori di Cartier.

**Proposizione 20.6.** *Sia $X$ uno schema ridotto ed irriducibile. Si ha un isomorfismo canonico*
$$\mathrm{Car}(X)/\mathrm{Pr}(X) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta di fasci su $X$
$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0.$$
Poiché $\mathcal{K}_X^*$ è fiacco, è aciclico, quindi $H^1(X, \mathcal{K}_X^*) = 0$ e si ottiene la seguente successione esatta
$$\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Car}(X) \xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to 0$$
dalla quale deduciamo che
$$\mathrm{Car}(X)/\mathrm{Pr}(X) = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)/\mathrm{Im}\alpha = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)/\operatorname{Ker}\beta \cong \mathrm{Im}\beta = H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$
Per il Teorema 19.5 sappiamo però che $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X)$ e il teorema è dimostrato. □

## 21. Fasci invertibili e morfismi in spazi proiettivi

Inizieremo ora a studiare i morfismi di uno schema in uno spazio proiettivo. Questo è un concetto fondamentale in Geometria Algebrica.

Premettiamo un'osservazione e dei lemmi.

**Osservazione 21.1.** Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi e sia $U$ un aperto di $X$. Sia $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora è definito un morfismo di schemi $f \circ j : U \to Y$.

*Dimostrazione.* A livello di spazi topologici è definita l'applicazione continua $f \circ j : U \to Y$. Inoltre abbiamo $j^\sharp : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_U$ che è definita da
$$j^\sharp(V) : \mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\rho^X_{V\cap U}} \mathcal{O}_X(V \cap U) = \mathcal{O}_U(V \cap U) = (j_*\mathcal{O}_U)(V).$$
Ora definiamo $(f \circ j)^\sharp : \mathcal{O}_Y \to (f \circ j)_*\mathcal{O}_U$ al modo seguente (usando l'Osservazione 2.16(ii)):
$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\sharp} f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{f_*(j^\sharp)} f_*(j_*\mathcal{O}_U) = (f \circ j)_*\mathcal{O}_U. \qquad \square$$

Se $A$ e $B$ sono anelli denotiamo con $\mathrm{Hom}(A, B)$ l'insieme degli omomorfismi da $A$ a $B$. Utilizzando l'Osservazione 21.1 abbiamo

**Lemma 21.2.** *Siano $X$ ed $Y$ due schemi e sia $U$ un aperto di $X$ con inclusione $j : U \hookrightarrow X$. Sia $\mathrm{Mor}(X, Y)$ l'insieme dei morfismi da $X$ a $Y$. Allora c'è un diagramma commutativo*
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(X,Y) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Hom}(\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y),\Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{Mor}(U,Y) \arrow[r, "\Phi_U"] & \mathrm{Hom}(\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y),\Gamma(U,\mathcal{O}_U))
\end{tikzcd}$$
*dove*
$$\varphi(f, f^\sharp) = (f \circ j, (f \circ j)^\sharp)$$
$$\Phi_X(f, f^\sharp) = f^\sharp(Y) : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}(Y), \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$
*$\Phi_U$ è definita analogamente, mentre se $h : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, allora*
$$\psi(h) = \rho^X_U \circ h : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{h} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\rho^X_U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U).$$

*Dimostrazione.* Si ha
$$\psi \circ \Phi_X(f, f^\sharp) = \rho^X_U \circ f^\sharp(Y)$$
mentre
$$\Phi_U \circ \varphi(f, f^\sharp) = \Phi_U(f \circ j, (f \circ j)^\sharp) = (f \circ j)^\sharp(Y).$$
Dalla dimostrazione dell'Osservazione 21.1 abbiamo che
$$(f \circ j)^\sharp(Y) = f_*(j^\sharp)(Y) \circ f^\sharp(Y)$$

ed è sufficiente verificare che $f_*(j^\sharp)(Y) = \rho^X_U$. Usando l'Osservazione 2.16(ii) e la dimostrazione dell'Osservazione 21.1 si ha

$$f_*(j^\sharp)(Y) = j^\sharp(f^{-1}(Y)) = j^\sharp(X) = \rho^X_{X\cap U} = \rho^X_U. \qquad \square$$

Nel caso in cui lo schema $Y$ è affine il lemma precedente ha una versione migliore.

**Proposizione 21.3.** *Sia $X$ uno schema e sia* $\mathrm{Spec}(A)$ *uno schema affine. Allora l'applicazione*

$$\Phi_X : \mathrm{Mor}(X, \mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

*è biettiva.*

*Ovvero dare un morfismo di schemi da $X$ a* $\mathrm{Spec}(A)$ *è equivalente a dare un omomorfismo di anelli da $A$ a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*

*Dimostrazione.* Sia $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto affine di $X$ con $U_i \cong \mathrm{Spec}(A_i)$ per ogni $i \in I$. È facile verificare che nel caso di schemi affini, le mappe $\Phi$ sono quelle nella dimostrazione del Teorema 12.4. In particolare ne segue che

$$\Phi_{U_i} : \mathrm{Mor}(U_i, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, A_i)$$

è biettiva. Notiamo anche che $A_i \cong \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ quindi

$$\Phi_{U_i} : \mathrm{Mor}(U_i, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)).$$

Ora mostriamo che $\Phi_X$ è iniettiva.

Siano $(f, f^\sharp), (g, g^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismi tali che

$$\Phi_X(f, f^\sharp) = \Phi_X(g, g^\sharp).$$

Per il Lemma 21.2 ci sono diagrammi commutativi, per ogni $i \in I$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(X,Y) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\psi_i"] \\
\mathrm{Mor}(U_i,Y) \arrow[r, "\Phi_{U_i}"] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X))
\end{tikzcd}$$

da cui deduciamo che

$$\Phi_{U_i}(\varphi_i(f, f^\sharp)) = \psi_i(\Phi_X(f, f^\sharp)) = \psi_i(\Phi_X(g, g^\sharp)) = \Phi_{U_i}(\varphi_i(g, g^\sharp))$$

e l'iniettività di $\Phi_{U_i}$ implica che $\varphi_i(f, f^\sharp) = \varphi_i(g, g^\sharp)$ ovvero che

$$(f \circ j_i, (f \circ j_i)^\sharp) = (g \circ j_i, (g \circ j_i)^\sharp)$$

dove $j_i : U_i \hookrightarrow X$ è l'inclusione. Ma $(f, f^\sharp)$ e $(g, g^\sharp)$ sono l'incollamento dei morfismi

$$(f \circ j_i, (f \circ j_i)^\sharp)_{i\in I} = (g \circ j_i, (g \circ j_i)^\sharp)_{i\in I}.$$

Quindi $(f, f^\sharp) = (g, g^\sharp)$ e $\Phi_X$ è iniettiva.

Ora mostriamo che $\Phi_X$ è suriettiva.

Sia $\chi : A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un omomorfismo di anelli e sia, per ogni $i \in I$,

$$\chi_i = \rho^X_{U_i} \circ \chi : A \xrightarrow{\chi} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\rho^X_{U_i}} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$$

Dato che $\Phi_{U_i}$ è suriettiva, per ogni $i \in I$ esiste un morfismo

$$(f_i, f_i^\sharp) : (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

tale che $\Phi_{U_i}(f_i, f_i^\sharp) = \chi_i$. Mostreremo ora che questi morfismi $(f_i, f_i^\sharp)_{i\in I}$ si incollano tra loro a un morfismo $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tale che

$$\Phi_X(f, f^\sharp) = \chi.$$

Dobbiamo dunque verificare che coincidono su $U_{ik}$ per ogni $k \in I$. Applicando il Lemma 21.2 abbiamo dei diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(U_i, Y) \arrow[r, "\Phi_{U_i}"] \arrow[d, "\varphi_{ik}"] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\psi_{ik}"] \\ \mathrm{Mor}(U_{ik}, Y) \arrow[r, "\Phi_{U_{ik}}"] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(U_{ik}, \mathcal{O}_X)) \end{tikzcd}$$

dove abbiamo anche usato che $\Gamma(U_{ik}, \mathcal{O}_{U_{ik}}) = \Gamma(U_{ik}, \mathcal{O}_X)$. Ora

$$\psi_{ik}(\chi_i) = \rho^{U_i}_{U_{ik}} \circ \rho^X_{U_i} \circ \chi = \rho^X_{U_{ik}} \circ \chi = \rho^{U_k}_{U_{ik}} \circ \rho^X_{U_k} \circ \chi = \psi_{ik}(\chi_k)$$

e sostituendo $\chi_i = \Phi_{U_i}(f_i, f_i^\sharp)$ otteniamo che

$$\psi_{ik}(\Phi_{U_i}(f_i, f_i^\sharp)) = \psi_{ik}(\Phi_{U_k}(f_k, f_k^\sharp))$$

ovvero, usando la commutatività del diagramma, che

$$\Phi_{U_{ik}}(\varphi_{ik}(f_i, f_i^\sharp)) = \Phi_{U_{ik}}(\varphi_{ik}(f_k, f_k^\sharp)).$$

Ma abbiamo dimostrato prima che $\Phi_X$ è iniettiva per ogni schema $X$, quindi, in particolare, anche $\Phi_{U_{ik}}$ è iniettiva e ne deduciamo che

$$\varphi_{ik}(f_i, f_i^\sharp) = \varphi_{ik}(f_k, f_k^\sharp) \text{ per ogni } i, k \in I.$$

Ma questo vuol dire esattamente che $(f_i, f_i^\sharp)$ coincide con $(f_k, f_k^\sharp)$ su $U_{ik}$. Pertanto i morfismi $(f_i, f_i^\sharp)_{i \in I}$ si incollano tra loro a un morfismo $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

Resta da dimostrare che $\Phi_X(f, f^\sharp) = \chi$.

Per ogni $a \in A$ si ha che $\Phi_X(f, f^\sharp)(a)$ e $\chi(a)$ sono sezioni di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, quindi

$$\Phi_X(f, f^\sharp)(a) = \chi(a)$$

se e solo se

$$\rho^X_{U_i}(\Phi_X(f, f^\sharp)(a)) = \rho^X_{U_i}(\chi(a)) \text{ per ogni } i \in I.$$

Ma questa vale dato che

$$\rho^X_{U_i}(\chi(a)) = \chi_i(a) = \Phi_{U_i}(f_i, f_i^\sharp)(a) = \Phi_{U_i} \circ \varphi_i(f, f^\sharp)(a) = \psi_i \circ \Phi_X(f, f^\sharp)(a) = \rho^X_{U_i}(\Phi_X(f, f^\sharp)(a)). \qquad \square$$

La prossima nozione, il luogo degli zeri di una sezione di un fascio invertibile, gioca un ruolo decisivo.

**Definizione 21.4.** Sia $X$ uno schema, sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su $X$ e sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Sia $x \in X$. Diremo che $s$ *si annulla in* $x$, scritto $s(x) = 0$, se $s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ dove $\mathfrak{m}_x$ è l'ideale massimale in $\mathcal{O}_{X,x}$. Diremo che $\mathcal{L}$ *è generato dalle sezioni globali* $\{s_\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{L}), \alpha \in I\}$, se per ogni $x \in X$ esiste $\alpha \in I$ tale che $s_\alpha(x) \neq 0$ (ovvero $(s_\alpha)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$). Diremo che $\mathcal{L}$ *è globalmente generato* se lo è da tutte le sezioni in $\Gamma(X, \mathcal{L})$.

Come è noto, usando il fascio associato al prefascio, ogni $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ può essere vista come una funzione $s : X \to \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{L}_x$ tale che $s(x) \in \mathcal{L}_x$ per ogni $x \in X$. Ora $\mathcal{L}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$ quindi possiamo comporre con la mappa quoziente $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ che è un campo ($k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ si dice il *campo residuo* di $X$ in $x$) ed ottenere una mappa $s' : X \to \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ che è tale che $s(x) = 0$ nel senso della definizione sopra, se e solo se $s'(x) = 0 \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Questo giustifica la definizione.

Osserviamo anche che una sezione $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ può essere rappresentata, su un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che $\mathcal{L}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ da un sistema $\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)\}$, corrispondenti nell'isomorfismo a $\{\rho^X_{U_i}(s)\}$, tale che $f_i = \varphi_{ij} f_j$ su $U_{ij}$ per ogni $i, j \in I$. Pur essendo dunque $s$ definita localmente da funzioni regolari, non ha senso parlare del valore di $s$ in un punto $x \in X$, sia perché potrebbe dipendere dal ricoprimento, sia perché la relazione $f_i(x) = \varphi_{ij}(x) f_j(x)$

rende priva di senso tale nozione. Però da questa relazione discende che $f_i(x) = 0$ se e solo se $f_j(x) = 0$ e quindi ha senso dire che $s(x) = 0$.

Per esempio sia $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ il fascio invertibile su $\mathbb{P}^r$. Sappiamo dal Teorema 16.7 che $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) = P_1$, cioè le sue sezioni globali sono polinomi omogenei di grado 1. Mostriamo che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ è globalmente generato (anzi, è generato da $\{x_0, \dots, x_r\}$).

Per ogni $y \in \mathbb{P}^r = \operatorname{Proj}(P)$ si ha che $\mathfrak{p}_y \not\supset P_+ = (x_0, \dots, x_r)$ quindi esiste $i \in \{0, \dots, r\}$ tale che $x_i \notin \mathfrak{p}_y$. Del resto $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)_y \cong P(1)_{(\mathfrak{p}_y)}$ mentre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r,y} \cong P_{(\mathfrak{p}_y)}$ con ideale massimale $\mathfrak{m}_y = \{\frac{f}{s} \in P_{(\mathfrak{p}_y)} : f \in \mathfrak{p}_y\}$ ed ora $(x_i)_y = \frac{x_i}{1} \in P(1)_{(\mathfrak{p}_y)}$ ma $\frac{x_i}{1} \notin \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)_y$, quindi $x_i(y) \neq 0$.

Un fatto importante è che l'insieme dei punti dove una sezione di un fascio invertibile non si annulla è un aperto (ovvero l'insieme dei punti dove una sezione di un fascio invertibile si annulla è un chiuso), come dimostra il seguente

**Lemma 21.5.** *Sia $X$ uno schema, sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su $X$ e sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Allora*
$$X_s := \{x \in X : s(x) \neq 0\}$$
*è un aperto di $X$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo intanto che esiste un ricoprimento aperto affine $\mathcal{U}$ di $X$ tale che $\mathcal{L}_{|U} \cong \mathcal{O}_U$ per ogni $U \in \mathcal{U}$. Infatti, preso un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che $\mathcal{L}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ per ogni $i \in I$ e un ricoprimento aperto affine $\{V_j\}_{j \in J}$ di $X$, allora abbiamo che $\mathcal{L}_{|U_i \cap V_j} \cong \mathcal{O}_{U_i \cap V_j}$ per ogni $i \in I$ e $j \in J$. Ma $U_i \cap V_j$ è un aperto di $V_j$, quindi $U_i \cap V_j$ è ricoperto da aperti affini fondamentali $W_{ijk}, k \in K_{ij}$ tali che $\mathcal{L}_{|W_{ijk}} \cong \mathcal{O}_{W_{ijk}}$ per ogni $i \in I, j \in J$, $k \in K_{ij}$. Allora basta prendere $\mathcal{U} = \{W_{ijk}\}_{i \in I, j \in J, k \in K_{ij}}$.

Ora sia $U \in \mathcal{U}$ con $U \cong \operatorname{Spec}(A)$ e $\mathcal{L}_{|U} \cong \mathcal{O}_U$. Allora c'è un omomorfismo
$$\Gamma(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\rho^X_U} \Gamma(U, \mathcal{L}_{|U}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \xrightarrow{\cong} A$$
e sia $\overline{s}$ l'immagine di $s$. L'asserto del lemma seguirà se mostriamo che $X_s \cap U = U_{\overline{s}}$. Infatti questo mostra che $X_s \cap U$ è aperto per ogni $U$, quindi anche che
$$X_s = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X_s \cap U$$
è aperto.

Mostriamo che $X_s \cap U = U_{\overline{s}}$. Ogni $x \in U$ corrisponde a $\mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec}(A)$ e si ha
$$x \in X_s \iff s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x \cong \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \iff \frac{\overline{s}}{1} \notin \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \iff \overline{s} \notin \mathfrak{p}_x \iff x \in U_{\overline{s}}. \qquad \square$$

## 22. Morfismi in uno spazio proiettivo

Studieremo ora i morfismi di uno schema in uno spazio proiettivo.

Premettiamo la seguente

**Definizione 22.1.** Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi e sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su $Y$, con funzioni di transizione $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_Y)$ su un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $Y$. L' *immagine inversa* $f^*\mathcal{L}$ è il fascio invertibile su $X$ definito dalle funzioni di transizione
$$(f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{ij}) \in \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}^*_X)$$
sul ricoprimento aperto $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ di $X$.

Infatti abbiamo $f^\sharp(U_{ij}) : \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(U_{ij}, f_*\mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}_X)$ quindi
$$(f^\sharp(U_{ij}))^* : \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}^*_Y) = \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_Y)^* \to \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}_X)^* = \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}^*_X)$$
dunque $(f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{ij}) \in \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}^*_X)$. Inoltre su $U_i$ si ha che $g_{ii} = 1$ quindi su $f^{-1}(U_i)$ si ha che $(f^\sharp(U_i))^*(g_{ii}) = 1$. Poi su $U_{ijk}$ si ha che
$$g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$$

quindi su $f^{-1}(U_{ijk}) = f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \cap f^{-1}(U_k)$ si ha

$$(f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{ik}) = (f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{ij}g_{jk}) = (f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{ij})(f^\sharp(U_{ij}))^*(g_{jk})$$

quindi, per l'Osservazione 18.9, è definito un fascio invertibile su $X$ che denotiamo con $f^*\mathcal{L}$.

Inoltre possiamo definire l'immagine inversa di una sezione.

**Definizione 22.2.** Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi, sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su $Y$ e sia $s \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $Y$ tale che $\mathcal{L}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ per ogni $i \in I$. L' *immagine inversa* $f^*s \in \Gamma(X, f^*\mathcal{L})$ è la sezione definita da $\{f^\sharp(U_i)(\rho^Y_{U_i}(s)) \in \Gamma(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)\}$.

Osserviamo che la definizione ha senso in quanto si ha una mappa

$$\Gamma(U_i, \mathcal{L}_{|U_i}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f^\sharp(U_i)} \Gamma(U_i, f_*\mathcal{O}_X) =$$
$$= \Gamma(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_{f^{-1}(U_i)}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(f^{-1}(U_i), (f^*\mathcal{L})_{|f^{-1}(U_i)}).$$

Osserviamo inoltre che, dato $x \in X$, si ha $s(f(x)) = 0$ se e solo se $(f^*s)(x) = 0$ (questo perché $f^\sharp_{f(x)}$ manda anelli locali in anelli locali). Questo implica anche che se $\mathcal{L}$ è globalmente generato, allora anche $f^*\mathcal{L}$ lo è. Infine è definita un'applicazione lineare $\Gamma(Y, \mathcal{L}) \to \Gamma(X, f^*\mathcal{L})$ che manda $s$ in $f^*s$.

Si ottiene

**Teorema 22.3.** *Sia $k$ un campo e sia $X$ un $k$-schema.*

(a) *Se $f : X \to \mathbb{P}^r_k$ è un morfismo di $k$-schemi, allora $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ è generato dalle sezioni globali $\{f^*x_0, \ldots, f^*x_r\}$.*

(b) *Se $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su $X$ generato dalle sezioni globali $\{s_0, \ldots, s_r\}$ allora esiste un unico morfismo di $k$-schemi $f : X \to \mathbb{P}^r_k$ tale che $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ e $s_i = f^*x_i$ per $0 \le i \le r$.*

*Dimostrazione.* (a) Abbiamo visto prima che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ è generato dalle sezioni globali $\{x_0, \ldots, x_r\}$ quindi, come visto sopra, $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ è generato da $\{f^*x_0, \ldots, f^*x_r\}$.

(b) Dato che $\mathcal{L}$ è generato dalle sezioni globali $s_0, \ldots, s_r$, ne segue che, per ogni $x \in X$ esiste $i \in \{0, \ldots, r\}$ tale che $s_i(x) \neq 0$, quindi $x \in X_{s_i}$. Per il Lemma 21.5 abbiamo un ricoprimento aperto

$$X = X_{s_0} \cup \ldots \cup X_{s_r}.$$

L'obiettivo ora è trovare dei morfismi sugli aperti coordinati $U_i$ di $\mathbb{P}^r$

$$f_i : X_{s_i} \to U_i$$

e poi incollarli ad un morfismo

$$f : X \to \mathbb{P}^r.$$

Sappiamo che $U_i \cong \mathrm{Spec}(P_{(x_i)})$ è affine, quindi possiamo applicare la Proposizione 21.3. Ne segue che, dare $f_i$ è equivalente a dare un omomorfismo di anelli

$$\varphi_i : P_{(x_i)} \to \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_{X_{s_i}}).$$

Dato che $P_{(x_i)}$ è generato (come anello) da $\frac{x_j}{x_i}$ è sufficiente definire $\varphi_i$ sui generatori. Definiamo

$$\varphi_i(\frac{x_j}{x_i}) = \frac{s_j}{s_i}$$

dove dobbiamo verificare che $\frac{s_j}{s_i}$ definisce una sezione di $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_{X_{s_i}})$. Ma per ogni $x \in X_{s_i}$ si ha che

$$(\rho^X_{X_{s_i}}(s_i))_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x \cong \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$$

quindi, via l'isomorfismo sopra, $(\rho^X_{X_{s_i}}(s_i))_x \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$, dunque $s_i$ è invertibile in un intorno di $x$ in $X_{s_i}$. Incollando gli inversi in tali intorni si trova che $s_i$ è invertibile su $X_{s_i}$ (in realtà abbiamo dimostrato che, via l'isomorfismo, $s_i$ corrisponde a una funzione invertibile, ma per comodità useremo questo abuso di notazione). Quindi $\varphi_i$ è ben definita.

Inoltre, come visto nella dimostrazione della Proposizione 21.3, per verificare che $f_i$ e $f_k$ coincidono su $X_{s_i} \cap X_{s_k}$, dato che $U_{ik} \cong \mathrm{Spec}(P_{(x_i x_k)})$, è sufficiente verificare che $\varphi_i$ e $\varphi_k$ coincidono su $P_{(x_i x_k)}$. Ma questo è chiaro dato che entrambe mandano $\frac{x_j x_l}{x_i x_k}$ in $\frac{s_j s_l}{s_i s_k}$.

Allora il morfismo $f : X \to \mathbb{P}^r$ incollamento degli $f_i : X_{s_i} \to U_i$ è definito.

Ora, essendo $s_i$ invertibile in $X_{s_i}$ si vede facilmente che le funzioni di transizione di $\mathcal{L}$ sul ricoprimento aperto $\{X_{s_i}\}_{i \in \{0,\dots,r\}}$ sono $\frac{s_k}{s_i}$ in $X_{s_i} \cap X_{s_k}$. Ma, come sappiamo, le funzioni di transizione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ sono le $\frac{x_k}{x_i}$. Quindi le funzioni di transizione di $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ sono le $\varphi_i(\frac{x_k}{x_i}) = \frac{s_k}{s_i}$. Ne segue che $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$.

Inoltre $f^*x_j$ è la sezione di $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ data da

$$\{\varphi_i(\rho^X_{U_i}(x_j))\}_{i \in \{0,\dots,r\}}.$$

Ma è facile vedere che

$$\varphi_i(\rho^X_{U_i}(x_j)) = \varphi_i(\frac{x_j}{x_i}) = \frac{s_j}{s_i}.$$

E, analogamente $\rho^X_{X_{s_i}}(s_j) = \frac{s_j}{s_i}$, quindi $f^*x_j = s_j$ per ogni $j \in \{0,\dots,r\}$.

Infine l'unicità di $f$ segue dal fatto che ogni morfismo che soddisfa $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ e $s_i = f^*x_i$ per $0 \le i \le r$ da luogo agli stessi morfismi $\varphi_i$ e quindi agli stessi $f_i$. □

## 23. Sistemi lineari

**Definizione 23.1.** Sia $k$ un campo e sia $X$ un $k$-schema. Un *sistema lineare* su $X$ è una coppia $(V, \mathcal{L})$ dove $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su $X$ e $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ è un sottospazio vettoriale. Un sistema lineare $(V, \mathcal{L})$ si dice *completo* se $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$.

In termini di sistemi lineari, il Teorema 22.3 può essere riscritto al modo seguente

**Teorema 23.2.** *Sia $k$ un campo e sia $X$ un $k$-schema. Dare un morfismo di $k$-schemi $f : X \to \mathbb{P}^r_k$ tale che $f(X)$ non è contenuta in un iperpiano è equivalente a dare un sistema lineare $(V, \mathcal{L})$ tale che $\dim V = r + 1$ e le sezioni di $V$ generano globalmente $\mathcal{L}$.*

*Dimostrazione.* Dato $f : X \to \mathbb{P}^r_k$ tale che $f(X)$ non è contenuta in un iperpiano, sia $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ e sia $V$ il sottospazio di $\Gamma(X, \mathcal{L})$ generato da $\{f^*x_0, \dots, f^*x_r\}$. Dalla (a) del Teorema 22.3 segue che le sezioni di $V$ generano globalmente $\mathcal{L}$. Inoltre se esistono $a_0, \dots, a_r \in k$ tali che

$$a_0 f^*x_0 + \ldots + a_r f^*x_r = 0$$

allora, per ogni $x \in X$ si ha che

$$a_0 f^*x_0(x) + \ldots + a_r f^*x_r(x) = 0$$

quindi

$$a_0 x_0(f(x)) + \ldots + a_r x_r(f(x)) = 0$$

quindi $a_0 = \ldots = a_r = 0$ altrimenti $f(X)$ è contenuta nell'iperpiano di equazione $a_0x_0 + \ldots + a_rx_r = 0$. Quindi $\dim V = r + 1$.

Viceversa dato un sistema lineare $(V, \mathcal{L})$ tale che $\dim V = r + 1$ e le sezioni di $V$ generano globalmente $\mathcal{L}$ e presa $\{s_0, \dots, s_r\}$ una base di $V$ si ha che $\{s_0, \dots, s_r\}$ generano globalmente $\mathcal{L}$:

per ogni $x \in X$ esiste $s \in V$ tale che $s(x) \neq 0$. Ma $s$ è combinazione lineare di $\{s_0, \dots, s_r\}$, quindi esiste $i \in \{0, \dots, r\}$ tale che $s_i(x) \neq 0$. Dalla (b) del Teorema 22.3 segue che è definito un morfismo $f : X \to \mathbb{P}^r$ tale che $s_i = f^*x_i$ per $0 \le i \le r$. Analogamente a prima se $f(X)$ fosse contenuta nell'iperpiano di equazione $a_0x_0 + \ldots + a_rx_r = 0$ (quindi con $a_0, \dots, a_r$ non tutti nulli) allora si avrebbe

$$a_0 x_0(f(x)) + \ldots + a_r x_r(f(x)) = 0$$

ovvero

$$a_0 f^*x_0(x) + \ldots + a_r f^*x_r(x) = 0$$

ovvero

$$a_0 s_0(x) + \ldots + a_r s_r(x) = 0$$

per ogni $x \in X$ quindi

$$a_0 s_0 + \ldots + a_r s_r = 0$$

contraddizione. □

## 24. Bibliografia


[AM] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduzione all'algebra commutativa; appendice all'edizione italiana di Paolo Maroscia.* Feltrinelli, Milano 1981.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Grad. Texts in Math., No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[K] G. R. Kempf, *Algebraic varieties.* London Math. Soc. Lecture Note Ser., 172. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I. Schemes-with examples and exercises.* Springer Stud. Math. Master,Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.