UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

presentata da Laura De Santis

Alcune questioni riguardanti l'estendibilitá delle varietá rigate

Relatore Prof. A.F.Lopez

ANNO ACCADEMICO 2001-2002
LUGLIO 2002

Sintesi

Sarebbe riduttivo attribuire l'evoluzione della geometria algebrica ad uno solo dei tanti movimenti che negli ultimi due secoli si sono succeduti e talvolta affiancati per riscrivere le fondamenta di questa branca della matematica, ognuno introducendo nuovi concetti e nuovi punti di vista. Tuttavia, non possiamo non citare Serre e Grothendeck, i cui studi si sono concretizzati con l'adozione di nuove tecniche di linguaggio che hanno permesso lo studio della geometria algebrica in termini di fasci e coomologia. Il merito di questi due noti matematici è stato quello di riuscire a riscrivere vecchi problemi con nuove tecniche.
Oggetto del presente studio è il problema dell'estendibilità di una varietà: sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietá proiettiva, esiste una varietá $Y \subset \mathbb{P}^{n+1}$ tale che X è una sezione iperpiana di Y?
Nel caso in cui la risposta è positiva Y si dice estensione di X. Naturalmente se Y è un cono con base X e vertice in $\mathbb{P}^{n+1} \setminus \mathbb{P}^n$, X è sezione iperpiana di Y, ma questo è il caso banale, il nostro obiettivo è di trovare una estensione di X non banale (quindi diversa da un cono su X).
L'argomento in esame è un problema classico ed ha una storia abbastanza lunga; infatti giá nel 1909 G.Scorza provó che se X è una varietá di Veronese di dimensione maggiore di 1 o una varietá di Segre (eccetto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) allora X ammette solo estensioni banali.
Recentemente molti matematici tra cui Sommese, Fujita, Zak, S.M. L'Vovsky e Badescu si sono dedicati allo studio di questo problema. L'Vovsky affronta la non estendibilitá di varietá proiettive lisce, Fujita, in uno dei suoi articoli, dimostra il seguente teorema: se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una varietá proiettiva liscia di dimensione maggiore o uguale di 2 con $H^1(X, \mathcal{T}_X(-i)) = 0$ per ogni $i > 0$ allora X non ammette estensioni non banali. Nel terzo capitolo useremo una

semplificazione del risultato di Fujita che, tramite il teorema di Zak, ci permette di studiare solo il caso $i = 1$. Anche Wahl ha dato il suo contributo con lo studio, iniziato nel 1987, delle mappe Gaussiane su una curva algebrica. Approfondiremo questo argomento nel primo capitolo, tratto appunto da un articolo di Wahl, dove prima di tutto definiremo e studieremo le prime prorietá delle mappe Gaussiane per poi relazionare la suriettivitá delle mappe Gaussiane con l'estendibilitá di curve algebriche. Questa relazione si puó ottenere tramite il teorema di Zak, considerato uno strumento utile per lo studio dell'estendibilitá delle varietá proiettive il quale ci permette di asserire che: se $h^0(X, \mathcal{N}_X(-1)) = n + 1$, dove $\mathcal{N}_X$ è il fascio normale su X, allora X non è estendibile nella sua immersione in $\mathbb{P}^n$.

Come corollario al teorema di Zak abbiamo quindi che, se X è una curva liscia irriducibile e non degenere di codimensione ≥ 2, e se la mappa Gaussiana Φ_{L,K_X} è suriettiva, allora X non è estendibile nell'immersione con L.

Dopo aver fatto una presentazione generale del problema possiamo entrare nello specifico e cioè analizzare il problema dell'estendibilitá nel caso delle varietá rigate. Per ovvie ragioni verranno prima introdotte le varietá rigate (secondo capitolo), per poi vedere nel terzo capitolo, sotto quali ipotesi queste varietá risultano non estendibili.

In particolare, nel secondo capitolo, vedremo che se $\pi : X \to Y$ è una superficie rigata allora esiste un fascio localmente libero $\mathcal{E}$ di rango 2 su Y tale che $X \cong \mathbf{P}(\mathcal{E})$; inoltre cercheremo di relazionare sia i divisori di X con i divisori di Y, sia la coomologia su X con la coomologia su Y attraverso $\pi_\star$.

Concluderemo il secondo capitolo con una serie di esempi di superfici rigate.

Il terzo capitolo affronterá alcune questioni riguardanti l'estendibilitá delle varietá rigate ed illustrerá alcuni interessanti risultati cui lo studio di questo argomento ha condotto. Infatti se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una varietá rigata ed $L = \pi^\star \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(a)$ il fibrato lineare che determina l'immersione in $\mathbb{P}^n$, dove $\mathcal{L}$ è un fibrato lineare su Y e $a \in \mathbb{Z}$, daremo condizioni per $\mathcal{L}$ e per a affinché X risulti non estendibile.

Bibliografia

[1] Arbarello, Enrico; Sernesi, Edoardo. *Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor* . Invent. Math. 49 (1978), no. 2, 99-119.

[2] R.Godement, *Topologie Algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris(1958).

[3] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[4] R.Lazarsfeld, *A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series* , in M.Cornalba et al (eds), Lector on Riemann Surfaces, World Scientific Press (Singapore,1989), 550-559.

[5] D.Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, Question on algebraic varieties (C.I.M.E. 1969), Corso, Roma, 1970.

[6] J.Wahl, *Introduction to Gaussian maps on an algebraic curve*, Trieste, 1989.

[7] J.Wahl, *Gaussian maps on algebraic curves* , J.Diff.Geom. 32 (1990), 77-98.