

Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analise Complessa - Esercitazione 1

DOCENTE: MARGARIDA MELO
ESERCITATORE: STEFANO PASQUALI

Esercizio 1. *Calcolare parte reale, parte immaginaria, coniugato e modulo dei seguenti numeri complessi:*

(i) $z = \frac{i-4}{2i-3};$

(ii) $z = (1+i)^6;$

(iii) $w = i^{17};$

(iv) $z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 + (\sqrt{10}+i)^2};$

(v) $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

(vi) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

(vii) $z = i^5 + i + 1;$

(viii) $z = (3+3i)^8;$

(ix) $u = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^7;$

(x) $z = \frac{(1+i)(3-3i)}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5}.$

Esercizio 2. *Mostrare che $z = \left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6$ ha modulo 1 per ogni possibile scelta dei segni.*

Esercizio 3. *Calcolare:*

(i) *le radici quadrate di $z = -1 - i$;*

(ii) *le radici cubiche di $z = -\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$.*

Esercizio 4. *Mostrare che non esiste alcun numero complesso z tale che*

$$|z| - z = i.$$

Esercizio 5. *Mostrare che $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ se $|a| = 1$ oppure se $|b| = 1$.*

Esercizio 6. *Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ossia che dati numeri complessi $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$,*

$$|z_1 w_1 + \dots + z_n w_n|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right) \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right).$$

Suggerimento: notare che $\sum_{j=1}^n |z_j + \lambda \bar{w}_j|^2 \geq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario. Per concludere scegliere λ opportuno.

Esercizio 7. Verificare, utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann, che le seguenti funzioni sono olomorfe e determinare la loro derivata.

(i) $f(z) = e^{z^2}$;

(ii) $f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}}$;

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$;

(iv) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$.

Esercizio 8. Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche e trovare una loro armonica coniugata.

(i) $u(x, y) = xy$;

(ii) $u(x, y) = \cos(x) \cosh(y)$;

(iii) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$;

(iv) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

(v) $u(x, y) = \arctan(y/x), x > 0$.

Esercizio 9. Applicazione: studio dei moti bidimensionali dei fluidi stazionari. Si consideri il fluido descritto dal campo di velocità $\vec{e}(x, y) := (u(x, y), v(x, y), 0)$, dove $x, y \in \mathbb{R}$. Si assuma che:

(i) $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$;

(ii) il fluido è incomprimibile, $\text{div}(\vec{e}) = 0$;

(iii) il fluido è in regime irrotazionale, $\vec{\nabla} \times \vec{e} = 0$.

Ora, l'incomprimibilità implica che esiste $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (detta funzione di flusso) tale che

$$\begin{cases} u &= \partial_y \Psi \\ v &= -\partial_x \Psi \end{cases},$$

mentre il regime irrotazionale implica che esiste $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (detto potenziale di velocità) tale che

$$\begin{cases} u &= \partial_x \Phi \\ v &= \partial_y \Phi \end{cases}.$$

Si può allora definire il potenziale complesso $U(x + iy) := \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$. Notare che Φ e Ψ soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

- Sia $\Psi(x, y) = x^2 + ay^2, a \in \mathbb{R}$. Determinare tutti i valori di a tali per cui il potenziale complesso U è una funzione olomorfa.

Suggerimento: di fatto, l'esercizio è simile a trovare un'armonica coniugata per una funzione data (ma stavolta la funzione data è la parte immaginaria di una funzione olomorfa).