Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 2

Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Stefano Pasquali

Esercizio 1. *Si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. *Mostrare che, se* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, *allora la serie ha raggio di convergenza* R. *Discutere poi la convergenza di* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *e di* $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Esercizio 2. *Discutere la convergenza delle seguenti serie di potenze.*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} x^{2n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. *Discutere la convergenza delle seguenti serie di potenze, e calcolarne il valore nel loro insieme di convergenza.*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n x$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.

Esercizio 4. *Siano* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ *serie di potenze aventi raggi di convergenza rispettivamente* R_1 *e* R_2. *Mostrare che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ *ha raggio di convergenza* $R_3 \geq R_1 R_2$.

Esercizio 5. *Sviluppare in serie di potenze le seguenti funzioni nel punto indicato.*

(i) $f(z) = (2i + z)^{-3}$ *in* $z = 0$;

(ii) $g(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ *in* $z = i$.

Suggerimento*: nel primo caso sfruttare l'uguaglianza* $f(z) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{2i+z}$.

Esercizio 6. *Risolvere le seguenti equazioni (nel seguito* $z \in \mathbb{C}$*).*

(i) $e^z = 1$;

(ii) $e^z = i$;

(iii) $e^z = re^{i\vartheta}$, $r \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$;

(iv) $e^z + e^{-z} = i$.

Esercizio 7. *Calcolare le seguenti quantità.*

(i) $\log(1 + i)$;

(ii) $\log(-\pi)$*;*

(iii) $\log(e)$*;*

(iv) $i^{\sqrt{2}}$*;*

(v) $(1-i)^{\sqrt{3}^{i}}$.

Esercizio 8. *Calcolare l'immagine attraverso la funzione esponenziale dei seguenti insiemi:*

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \varphi < Im(z) < \vartheta, \vartheta - \varphi \in]0, 2\pi[\}$*;*

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, 0 < Im(z) < 2\pi\}$.