# Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
# AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 3

Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Stefano Pasquali

**Esercizio 1.** *Disegnare le seguenti curve*

*(i)* $\gamma_1(t) = 1 + it$, $t \in [0, 1]$;

*(ii)* $\gamma_2(t) = e^{-i\pi t}$, $t \in [0, 1]$;

*(iii)* $\gamma_3(t) = e^{i\pi t}$, $t \in [0, 1]$;

*(iv)* $\gamma_4(t) = 1 + it + t^2$, $t \in [0, 1]$.

**Esercizio 2.** *Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni su ciascuna curva dell'esercizio precendente*

*(i)* $f(z) = z^3$;

*(ii)* $f(z) = \bar{z}$;

*(iii)* $f(z) = 1/z$.

**Esercizio 3.** *Calcolare* $\int_\gamma ze^{z^2} dz$

*(i) lungo un segmento che congiunge il punto* $i$ *al punto* $-i + 2$;

*(ii) lungo la curva che va dal punto* $i$ *al punto* $1 + i$ *lungo la parabola* $y = x^2$.

**Esercizio 4.** *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, *e sia* $\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. *Mostrare che* $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

**Esercizio 5.** *Siano* $[a, b], [c, d] \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq b$, $c \neq d$. *Mostrare che esiste* $g(t) = rt + s$ *strettamente crescente tale che* $g(a) = c$, $g(b) = d$.
Corollario*: una curva può essere parametrizzata da ogni intervallo fissato.*

**Esercizio 6.** *Esprimere in serie di potenze la funzione inversa di*

$$f(z) = (1 - z)^2, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

**Esercizio 7.** *Si consideri la serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Fib(n)z^n, \tag{2}$$

*dove* $Fib(0) = 0$, $Fib(1) = 1$, $Fib(n) = Fib(n - 1) + Fib(n - 2)$ *per* $n \geq 2$. *Verificare che*

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}, \tag{3}$$

*ove il secondo membro è ben definito.*

**Esercizio 8.** *Siano* $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ *con* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(D,\mathbb{C})$, $\alpha : [a,b] \to D$. *Mostrare che, se* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\infty,\alpha([a,b])} = 0$, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(z)dz = \int_\alpha f(z)dz. \tag{4}$$

**Esercizio 9.** *Sia* $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continua, mostrare che* $\left|\int_a^b F(z)dz\right| \leq \int_a^b |F(z)|dz$.
Suggerimento*: usare la definizione di integrale come limite di somme di Riemann.*

**Esercizio 10.** *Siano* $a < b$, $S := \{z \in \mathbb{C} : a < Im(z) < b\}$, $f : S \to \mathbb{C}$ *tale che* $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} f(z) = 0$.
*Sia* $S_c := [c + ia, c + ib]$, $c \in \mathbb{R}$. *Mostrare che*

$$\lim_{c\to\pm\infty} \int_{S_c} f(z)dz = 0. \tag{5}$$

**Esercizio 11.** *Sia* $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $a > 0$. *Sia* $r > 0$, *e sia* $T$ *il triangolo di vertici* $0$, $ra$ *e* $r\alpha$. *Sia* $f(z) = e^{-z^2}$.

*(i) Scrivere in dettaglio (ma non calcolare esplicitamente)* $\int_T f(z)dz$;

*(ii) mostrare che, se* $|b| < a$, $\int_{[ra,r\alpha]} f(z)dz \overset{ra\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

*(iii) calcolare* $\int_T f(z)dz$.

**Esercizio 12.** *Sia* $\gamma_m(t) := c + Re^{2\pi itm}$, $t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z}$, $R > 0$, $c \in \mathbb{C}$. *Calcolare*

$$I_{p,m} := \int_{\gamma_m} \frac{1}{(z-c)^p} dz, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

**Esercizio 13.** *Sia* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *mostrare che* $exp\left(\int_\alpha \frac{dz}{z}\right) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)}$.
Corollario*: Se* $\alpha(a) = \alpha(b)$, *allora esiste* $m \in \mathbb{Z}$ *tale che* $\int_\alpha \frac{dz}{z} = 2\pi im$.