

Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 4

DOCENTE: MARGARIDA MELO
ESERCITATORE: STEFANO PASQUALI

Esercizio 1. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Siano $a \in]-1, 1[$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos(n\vartheta)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin(n\vartheta)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

(i) Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Dedurre che per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(z,r)} |f(w)| ds_r(w),$$

dove s_r è il differenziale d'arco.

(ii) Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z,r)} |f(x + iy)| dx dy.$$

(iii) Dedurre che una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è in $L^1(\mathbb{R}^2)$ se e solo se $f \equiv 0$.

Esercizio 3. Sia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

Calcolare $\int_C \sin(z) dz$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali sulla circonferenza di raggio 1 percorsa una sola volta in senso antiorario.

(i) $\int_{|z|=1} \frac{\cosh(z)}{z^2} dz;$

(ii) $\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} + 4 \sin(z)}{z^4} dz;$

(iii) $\int_{|z|=1} \frac{z}{\sin(z)} dz;$

(iv) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^n} dz, n \in \mathbb{N};$

(v) $\int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^n} dz, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{C}[z].$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e si supponga che esista $R > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq |z|^n, \text{ for } |z| > R.$$

Mostrare allora che $f \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(f) \leq n$.

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\oint_B \frac{\sinh(z)}{z(z-1/2)} dz$, where

$$B = \{x + iy : |x| \leq 1, |y| = 1\} \cup \{x + iy : |y| \leq 1, |x| = 1\};$$

(ii) $\oint_C \frac{e^{\sin(z)}}{(z-1)(z-3i)} dz$, where

$$C = \{x + iy : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\};$$

(iii) $\oint_D \frac{\log(z)}{(z-i)^2} dz$, where

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = r\}, \quad 0 < r < 1,$$

and $\log(z) := \log(|z|) + i \arg(z)$, $\arg(z) \in [0, 2\pi[$, for any $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.