Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 6

Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Stefano Pasquali

Lemma 1. *Si denoti con*

$$A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2] := \{z \in \mathbb{C} : z = c + re^{i\vartheta}, r > 0, \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}$$

l'angolo di vertice c ed ampiezza $\vartheta_2 - \vartheta_1$.

(i) Lemma dell'arco di cerchio piccolo
Siano $R > 0$, $f : A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2] \cap |z - c| \leq R \to \mathbb{C}$ *continua, allora, se*

$$\lim_{\substack{z \to c \\ z \in A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2]}} (z - c) f(z) = k,$$

allora

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i(\vartheta_2 - \vartheta_1)k,$$

dove $\gamma_r(\vartheta) = c + re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$.

(ii) Lemma dell'arco di cerchio grande
Siano $R > 0$, $f : A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2] \cap |z - c| > R \to \mathbb{C}$ *continua, allora, se*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2]}} z f(z) = k,$$

allora

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i(\vartheta_2 - \vartheta_1)k,$$

dove $\gamma_r(\vartheta) = c + re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$.

(iii) Lemma di Jordan, caso particolare
Siano $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \pi$, $f : A(c, [\vartheta_1, \vartheta_2] \to \mathbb{C}$ *continua, allora*

- *se*

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in A(0, [\vartheta_1, \vartheta_2]}} f(z) = 0$$

e $\alpha > 0$, *allora*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0,$$

dove $\gamma_r(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$;

- *se*

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in A(0,[\vartheta_1,\vartheta_2]}} zf(z) = 0$$

e $\alpha \geq 0$, *allora*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\, dz = 0,$$

dove $\gamma_r(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1. *Siano* $a, b > 0$, *e si consideri* $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_{a,b}(x) := \frac{x^2}{b^2 + x^2} - \frac{x^2}{a^2 + x^2}.$$

Mostrare che $f_{a,b} \in L^1(\mathbb{R})$, *e calcolare* $\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(x)\, dx$.

Esercizio 2. *Calcolare tramite il Teorema dei Residui* $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^4}\, dt$.

Esercizio 3. *Sia* $a > 0$ *fissato, e si consideri* $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f_a(z) := \frac{z^2(1 - e^{2\pi iz})}{(z^2 - 1)(z^2 + a^2)}.$$

(i) Trovare le singolarità di f_a, *e calcolare i residui relativi alle singolarità con parte immaginaria non negativa.*

(ii) Mostrare che esiste finito $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \sin^2(\pi x)}{(x^2-1)(x^2+a^2)}\, dx$, *e calcolarlo.*

Osservazione 1. *Si supponga di dover calcolare*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta,$$

dove $(x, y) \mapsto R(x, y)$ *è una funzione razionale definita su (un intorno di)* $\mathbb{S}^1$. *Ponendo* $z = e^{i\vartheta}$ *si ha*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta = \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}(z + 1/z), \frac{1}{2i}(z - 1/z)\right) \frac{dz}{iz},$$

dove $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Per il teorema dei residui l'integrale è uguale a $2\pi i$ *per la somma dei residui di* R *sui poli con modulo strettamente minore di* 1.

Esercizio 4. *Sia* $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$, *e si consideri* $P_\alpha(\vartheta) := \frac{|1-\alpha|^2}{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}$. *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} P_\alpha(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Esercizio 5. *Sia $a > 1$ fissato, calcolare*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\vartheta)}{a + \cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

Osservazione 2. *Sia f olomorfa in un aperto contenente il semipiano $\{Im(z) \geq 0\}$, a meno di un numero* finito *di singularità con parte immaginaria non nulla. Si supponga che*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ Im(z) \geq 0}} f(z) = 0,$$

allora per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{i\alpha x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ singularità di } f \\ Im(a) > 0}} Res(e^{i\alpha \sharp} f(\sharp), a).$$

Esercizio 6. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, si calcoli $I_\alpha := \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx$.*

Esercizio 7. *Sia $a > 0$, si calcoli $I_a := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}\, dx$.*