Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 6

Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Stefano Pasquali

Esercizio 1. *Siano* $T_1 : z \mapsto \frac{z+2}{z+3}$, $T_2 : z \mapsto \frac{z}{z+1}$, *scrivere* $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$, $T_1^{-1} \circ T_2$.

Esercizio 2. *Mostrare che la coniugazione complessa* $z \mapsto \bar{z}$ *non si può scrivere come una trasformazione lineare fratta.*

Esercizio 3. *Mostrare che ogni trasformazione lineare fratta che mappi l'asse reale in se stesso si può scrivere con coefficienti reali.*

Osservazione 1. *Se* $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *sono punti distinti, la trasformazione lineare fratta che mappa la terna* (z_2, z_3, z_4) *nella terna* $(1, 0, \infty)$ *(*in quest'ordine*) è data da*

$$Sz = \frac{\frac{z-z_3}{z-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}}, \ z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Se $z_2 = \infty$, *allora* $S = \frac{z-z_3}{z-z_4}$. *Se* $z_3 = \infty$, *allora* $S = \frac{z_2-z_4}{z-z_4}$. *Se* $z_4 = \infty$, *allora* $S = \frac{z-z_3}{z_2-z_3}$.

Definizione 1. *Se* $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *sono punti distinti, il birapporto* (z_1, z_2, z_3, z_4) *è l'immagine di* z_1 *tramite la trasformazione lineare fratta* S *che mappa la terna* (z_2, z_3, z_4) *nella terna* $(1, 0, \infty)$ *(*in quest'ordine*).*

Lemma 1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) Se $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *sono punti distinti e* T *è una trasformazione lineare fratta, allora*

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

(ii) Date le due triplette di punti distinti (z_1, z_2, z_3) *e* (w_1, w_2, w_3), *la trasformazione lineare fratta* $z \mapsto S(z) =: w$ *che mappa* z_i *in* $w_i (i = 1, 2, 3)$ *è data da*

$$(w, w_1, w_2, w_3, w_4) = (z, z_1, z_2, z_3). \tag{2}$$

(iii) Il birapporto $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ *se e solo se* z_1, z_2, z_3, z_4 *appartengono ad un cerchio oppure ad una retta.*

(iv) Una trasformazione lineare fratta mappa cerchi in cerchi.

Esercizio 4. *Trovare la trasformazione lineare fratta che mappa la terna* $(0, i, -i)$ *in* $(1, -1, 0)$.

Esercizio 5. *Esprimere i birapporti corrispondenti a* tutte *le permutazioni dei 4 punti* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *(dove* z_2, z_3, z_4 *sono punti distinti) in termini del birapporto* $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Esercizio 6. *Determinare la trasformazione lineare fratta che mappa*

(i) $(0, 1, \infty)$ *in* $(0, \infty, 1)$*;*

(ii) $(0, 1, 2)$ *in* $(0, 1, \infty)$*;*

(iii) $(2, 1, 0)$ *in* $(0, 1, 2)$*;*

(iv) $(1, \omega, \omega^2)$ *in* $(2, 2 + i, \infty)$*, dove* $\omega^3 = 1$*,* $\omega \neq 1$*;*

(v) $(1, 2, i)$ *in* $(3, i, 2i)$.

Esercizio 7. *Determinare* una *trasformazione lineare fratta che mappa*

(i) $\mathbb{R}$ *in* $i\mathbb{R}$*;*

(ii) $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{S}^1$*;*

(iii) $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$ *in* $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0\}$*;*

(iv) $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + y^2 = 4\}$ *in* $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 2\}$*;*

Esercizio 8. *Mostrare che il gruppo delle trasformazioni lineari fratte è isomorfo al gruppo* $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$.