Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 1

(Consegnare gli esercizi $4, 5, 9$ e 11 entro 27/03/2018)

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e siano $u(x, y)$ e $v(x, y)$ la parte reale e immaginaria di f, rispettivamente. Dimostrare che il Jacobiano di (u, v) relativamente a (x, y) è uguale a $|f'(z)|^2$.*

Esercizio 2. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa e mai nulla nella regione $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si dimostri che la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è olomorfa in Ω, calcolando la formula per la sua derivata.*

Esercizio 3. *Sia w un numero complesso e consideriamo la sucessione $\{a_n\} = \{w^n\}$. Dimostrare che $\{a_n\}$ è divergente se $|w| > 1$ e che converge a 0 se $|w| < 1$.*

Esercizio 4. *Si dimostri che, se $|z| \neq 1$, esiste*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z^n - 1}{z^n + 1} \right).$$

Esiste una funzione continua su $\mathbb{C}$ che ristretta a $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$ coincida con f?

Esercizio 5. *Determinare l'imagine tramite la mappa esponenziale dell'insieme*

$$\{z|\mathrm{Im(z)} = \mathrm{Re(z)}^2\}.$$

Esercizio 6. *Sia f analitica su $\mathbb{C}$ tale che $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, e tale che la sua serie di potenze intorno a 0 abbia raggio di convergenza infinito. Mostrare che, $\forall z \in \mathbb{C}, f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.*

Esercizio 7. *Sia $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza $R \geq 1$. Assumiamo che la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ sia convergente. Si dimostri che, per $0 \leq x < 1$,*

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

*(*Oss. Questo risultato è noto come *Teorema di Abel.)*

Esercizio 8. *I* polinomi di Legendre *possono definirsi come i coefficienti $P_n(\alpha)$ dello sviluppo in serie di potenze di*

$$f(z) = \frac{1}{(1 - 2\alpha z + z^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + P_1(\alpha)z + P_2(\alpha)z^2 + \cdots + P_n(\alpha)z^n + \ldots.$$

Dare una formula per $P_n(\alpha)$.

Esercizio 9. *Per ogni numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri la serie di potenze formale*

$$(1+T)^\alpha = \sum_{n\geq 1} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\dots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

(i) Dimostrare che il raggio di convergenza R di $(1+T)^\alpha$ è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 \text{ se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti identità tra serie di potenze formali

$$(1+T)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+T)) \text{ e } \log(\exp(T)) = T$$

dove $\exp(T)$ e $log(1+T)$ sono le serie di potenze formali in $\mathbb{C}[[T]]$ definite da

$$\exp(T) := \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \text{ e } \log(1+T) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}T^n}{n}$$

*(*Sugg.*: Considerare prima il caso $\alpha \in \mathbb{R}$ e si ucessivamente osservare che il coefficiente in ciascuna serie è un polinomio in α.)*

(iii) Dimostrate che per ogni α e β complessi vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(1+T)^\alpha (1+T)^\beta = (1+T)^{\alpha+\beta}$$

Esercizio 10. *Sia*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza della serie e si dimostri che $f''(z) = f(z)$.

Esercizio 11. *(i) Per $|z-1| < |z_0|$, mostrare che, se*

$$f(z) = \log z = \log(1+(z-1)) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

allora $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) Per $z_0 \neq 0$ e z tale che $|z-z_0| < 1$, sia

$$g(z) = \sum (-1)^{n-1} \frac{(\frac{z-z_0}{z_0})^n}{n}.$$

Mostrare che $g'(z) = \frac{1}{z}$.

Esercizio 12. *Siano $f(z) = \sin(z^2)$ e $g(z) = (\sin z)^2$. Determinare se f e/o g sono isomorfismi analitici locali in $z = 0$ e, in caso positivo, trovare lo sviluppo per l'inversa.*