

Corso di laurea in Matematica - A. A. 2017/2018
AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 4
(Consegnare entro 31/05/2018)

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Determinare e classificare le singolarità isolate e gli zeri delle seguenti funzioni:*

(i) $f(z) = z + \frac{1}{z}$;

(ii) $\sin(\frac{z}{z+1})$;

(iii) $\tan z$;

(iv) $z \sin(\frac{1}{z})$.

Esercizio 2. *Sia U un'aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $\mathfrak{M}(U)$ l'insieme delle funzioni meromorfe su U . Dimostrare che $\mathfrak{M}(U)$ è un campo contenuto nel campo quoziente di $\mathfrak{H}(U)$, il dominio delle funzione meromorfe su U .*

Esercizio 3. *Per ogni intero $n \geq 2$, si calcoli l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$.*

Esercizio 5. *Si sia una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'algebra usando il principio dell'argomento.*

Esercizio 6. *Sia γ una curva chiusa semplice e siano f e g funzione olomorfe su $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ tali che $|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \gamma$. Si dimostri che:*

(i) f e g non hanno zeri lungo γ ;

(ii) Sia $F := \frac{g}{f}$. Allora $F \circ \gamma$ è contenuta in $D_1(1)$ e $W(F \circ \gamma, 0) = 0$.

(iii) Usando il principio dell'argomento, si dimostri che il numero di zeri di f è uguale al numero di zeri di g (questo risultato è noto come teorema di Rouché).

(iv) Applicare il risultato precedente per dare una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'algebra.

Esercizio 7. *Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tre punti distinti.*

(i) *Mostrare che se z_1, z_2 e z_3 sono fissati per una funzione $f \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ allora f è l'identità.*

(ii) Mostrare che la funzione $z \mapsto \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ è l'unica che manda z_1 in 0, z_2 in 1 e z_3 in ∞ .

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione analitica sul disco. Mostrare che se f fissa due punti distinti allora f è l'identità.

Esercizio 9. Sia $\log$ la funzione analitica globale i cui rami sono gli elementi di funzione $(U, \log)$ dove U è un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $\log$ è una funzione olomorfa su U tale che $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$. Si dimostri che il dominio di definizione di $\log$ è $\mathbb{C}^*$ e che $\log$ non è banale.