

Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018
AC310 - Analisi Complessa - Primo Appello di Esame: 08/06/2018
DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. (8 punti) *Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Allora f è costante.*

R:

(ii) *La funzione $f(z) = \cos(z^2)$ è un isomorfismo analitico locale in $z = 0$.*

R:

(iii) *Sia f una funzione intera. Allora f ammette una primitiva.*

R:

(iv) *La funzione $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ ammette uno sviluppo in serie di Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ valido in $\mathbb{C}^*$.*

R:

(v) *La funzione $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$ ha una singolarità rimuovibile in $z = 0$.*

R:

(vi) *La funzione analitica globale $\log$ è algebrica.*

R:

Esercizio 2. (5 punti) Sia f una funzione continua in un aperto $U \subset \mathbb{C}$.

- (i) Dimostrare che se esiste una primitiva g di f in U , allora per qualunque cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, l'integrale $\int_{\gamma} f dz$ dipende soltanto dai punti iniziale e finale $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ (ed è quindi indipendente del cammino γ).
- (ii) Si dimostri che f ammette una primitiva in U se e soltanto se per ogni cammino chiuso $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, si ha che $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Esercizio 3. (3 punti) Sia f una funzione intera tale che, per ogni numero complesso $w \in \mathbb{C}$, la espansione $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - w)^n$ è tale che almeno uno dei c_n è 0. Dimostrare che f è un polinomio.

Esercizio 4. (4 punti) Dimostrare che la serie

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{z}{z^2 - n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici negli interi.

Esercizio 5. (4 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin \theta} d\theta$$

con il metodo dei residui.

Esercizio 6. (3 punti) Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-1)}$.

- (i) Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di f nella regione $R := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.
- (ii) Qual è il più grande aperto di convergenza della serie di Laurent trovata nel punto precedente?

Esercizio 7. (5 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (i) Dimostrare che se U è semplicemente connesso, allora esiste una primitiva $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ della funzione $\frac{1}{z}$ su U .
- (ii) Dimostrare che se esiste una primitiva della funzione $\frac{1}{z}$ su U , allora esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$).
- (iii) Si determini una espressione analitica per $\log(z)$ valida in $U = D_1(1)$.

Esercizio 8. (4 punti)

- (i) Si dia una descrizione del gruppo degli automorfismi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.
- (ii) Calcolare, usando il risultato precedente, il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}$.
- (iii) Trovare la trasformazione lineare fratta che mappa $(0, 1, \infty)$ in $(\infty, 1, 0)$.