Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018

AC310 - Analisi Complessa - Primo esonero: 12/04/2018

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*10 punti*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) La funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ *è olomorfa in* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

R:

(ii) Sia $\sqrt{i} = x + iy$*, con* $x, y \in \mathbb{R}$*. Allora* $x = y$.

R:

(iii) Esiste un numero complesso z *tale che* $\lim_{n\to\infty} z^n = -1$.

R:

(iv) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z^2+1} = 0$*, dove* C_2 *è la circonferenza di centro nell'origine e raggio* 2 *percorsa in senso anti-orario.*

R:

(v) Sia $f(z)$ *una funzione olomorfa in un'aperto* U *tale che* $|f(z)-1| < 1$*, per ogni* z *in* U*. Allora, data una curva chiusa* $\gamma \subset U$*,* $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = 0$.

R:

Esercizio 2. *(4 punti) Sia* $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ *una funzione analitica non costante in* $U = D_r(0)$, *con* $r > 0$. *Si dimostri che*

1. *Esiste un'isomorfismo analitico* $\varphi(z)$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $f(z) = (\varphi(z))^n$.
2. *Se* f *è iniettiva in* U, *allora* f *è un'isomorfismo analitico.*

Esercizio 3. *(6 punti)*

Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *una funzione olomorfa in un aperto* $U \subset \mathbb{C}$.

(i) Si dimostri che valgono le equazioni di Cauchy-Riemann.

(ii) Se f *non è mai nulla in* U, *mostrare che* $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ *è olomorfa in* U *e determinare una formula per la sua derivata.*

(iii) Si dimostri che in coordinate polari $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\sin\theta$, *valgono le equazioni di Cauchy-Riemann polari:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Esercizio 4. *(6 punti) Sia* $m \in \mathbb{N}$ *e si definisca la consideri la serie di potenze formale*

$$B_{\frac{1}{m}}(T) = (1+T)^{\frac{1}{m}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{m}}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\dots(\frac{1}{m}-n+1)}{n(n-1)\dots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

(i) Dimostrare che vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$\left(B_{\frac{1}{m}}(T)\right)^m = 1 + T.$$

(ii) Discutere se $B_{\frac{1}{m}}(T)$ *è invertibile in* $\mathbb{C}[[T]]$.

(iii) Dimostrare che il raggio di convergenza R *di* $B_{\frac{1}{m}}(T)$ *è uguale a* 1.

(iv) Sviluppare in serie di potenze in torno a 0 *la funzione* $(1-z^2)^{\frac{1}{m}}$, *determinandone il dominio di convergenza.*

Esercizio 5. *(5 punti) Sia* $f(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$.

(i) Determinare il dominio di continuità di f.

(ii) Mostrare che $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(iii) Sia $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *la funzione esponenziale. Mostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa* h *su* $\mathbb{C}^*$ *tale che* $\exp(h(z)) = z$, *per ogni* $z \in \mathbb{C}^*$.

Esercizio 6. *(5 punti) Sia* C_R *la circonferenza di raggio* $R > 0$ *centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.*

(i) Calcolare $\displaystyle\int_{C_R} g(z)$, *dove* $g(z) = \dfrac{|z|}{z}$.

(ii) Mostrare che, se f *è una funzione continua,*

$$\lim_{R\to 0} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} = 2i\pi f(0).$$