Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018

AC310 - Analisi Complessa - Quarto Appello di Esame: 17/01/2019

Docente: Margarida Melo

Durata: 3h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*8 punti*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *La funzione* $f(z) = \overline{z}$ *è intera.*

R:

(ii) *Sia* f *una funzione olomorfa su un'insieme connesso. Allora* f *ammette una primitiva.*

R:

(iii) *La funzione* $f(z) = \frac{z+1}{z(z+i)}$ *ammette uno sviluppo in serie di Laurent valido in* $\mathbb{C}^*$.

R:

(iv) *La funzione* $f(z) = \cos(\frac{z}{z+1})$ *ha una singolarità essenziale in* $z = -1$.

R:

(v) *Un'automorfismo di* $\mathbb{D}$ *che fissa* $\{-1, 1\}$ *è necessariamente l'identità.*

R:

(vi) *La funzione analitica globale* $\underline{\sqrt{z}}$ *è algebrica.*

R:

Esercizio 2. *(7 punti)*

(i) *Si enunci e si dia una dimostrazione del Principio del Massimo Modulo Locale.*

(ii) *Si dia una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra usando questo principio.*

(iii) *Dimostrare che, se* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *è un polinomio con coefficienti reali di grado dispari, allora* $p(z)$ *ammette soluzioni reali.*

Esercizio 3. *(3 punti) Sia* f *una funzione intera tale che, per ogni numero complesso* $w \in \mathbb{C}$*, la espansione* $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-w)^n$ *è tale che almeno uno dei* c_n *è* 0*. Dimostrare che* f *è un polinomio.*

Esercizio 4. *(5 punti) Sia* $f(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$.

(i) *Determinare l'interno e la chiusura del dominio di continuità di* f.

(ii) *Mostrare che* $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(iii) *Sia* $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *la funzione esponenziale. Mostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa* h *su* $\mathbb{C}^*$ *tale che* $\exp(h(z)) = z$*, per ogni* $z \in \mathbb{C}^*$.

Esercizio 5. *(7 punti) Consideriamo la funzione meromorfa* $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2-1}$.

(i) *Classificare le singolarità di* f.

(ii) *Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di* f *in potenze di* z *e determinarne la regione di validità.*

(iii) *Calcolare l'integrale*

$$\int_\gamma f(z)$$

dove γ *è:*

(a) *la circonferenza* $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$*, percorsa in senso anti-orario.*

(b) *la circonferenza* $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$*, percorsa in senso anti-orario.*

Esercizio 6. *(5 punti) Dimostrare che, per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $\int_\gamma \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$*, dove* $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$*, percorsa in senso anti-orario, e dedurne che*

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) d\theta = \pi.$$

Esercizio 7. *(2 punti)*

Si dia una descrizione del gruppo degli automorfismi di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *e del gruppo degli automorfismi di* $\mathbb{C}$.