Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018

AC310 - Analisi Complessa - Secondo Appello di Esame: 03/07/2018

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*8 punti*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Non esiste alcun numero complesso z *tale che* $|z| - z = i$.

R:

(ii) La funzione $f(z) = z^3$ *è localmente invertibile in* $z = 0$.

R:

(iii) Sia f *una funzione intera che ha un numero infinito di zeri. Allora* f *è la funzione nulla.*

R:

(iv) Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ *è una singolarità essenziale per una funzione* f *se e solo se lo è per* f'.

R:

(v) Un'automorfismo di $\mathbb{C}$ *che fissa la retta reale è necessariamente l'identità.*

R:

(vi) La funzione analitica globale associata a una funzione razionale è banale.

R:

Esercizio 2. *(7 punti) Sia f una funzione analitica in un aperto $U \subset \mathbb{C}$.*

(i) *Si dimostri che f è olomorfa in U.*

(ii) *Dimostrare che f si può scrivere localmente, a meno di isomorfismo locale, come una potenza $z \mapsto z^m$.*

(iii) *Dimostrare che se $z_0 \in U$ è tale che $f(z_0) = 0$ e se f non è localmente costante, allora z_0 è uno zero isolato di f.*

(iv) *Si dimostri che se U è connesso e se f è localmente costante in z_0, allora f è costante in U.*

Esercizio 3. *(3 punti) Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.*

(i) *Si dimostri che f è intera e soddisfa l'equazione differenziale $f''(z) = f(z)$.*

(ii) *Si concluda che f ammette una primitiva e si determini una espressione per una primitiva di f.*

Esercizio 4. *(4 punti) Dimostrare che, per $|z| < 1$, vale l'uguaglianza*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

Esercizio 5. *(4 punti) Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \dfrac{1+\cos(z)}{z^4}$.*

(i) *Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di f in potenze di z, determinandone la regione di convergenza.*

(ii) *Calcolare, in funzione di z_0 e r, $\int_{C_r(z_0)} f(z)$, dove $C_r(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r.*

Esercizio 6. *(4 punti)*

(i) *Enunciare il teorema dei residui.*

(ii) *Calcolare l'integrale*

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^3}$$

dove γ è la circonferenza $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$, percorsa in senso orario.

Esercizio 7. *(4 punti)*

(i) *Mostrare che se f è un automorfismo di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ che fissa 3 punti distinti allora f è l'identità. .*

(ii) *Trovare la trasformazione lineare fratta che mappa $\mathbb{R}$ in $\mathbb{S}^1$.*