Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018

AC310 - Analisi Complessa - Secondo esonero: 31/05/2018

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*10 punti*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia $U \subset \mathbb{C}$ connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f ammette una primitiva in U.

R:

(ii) Sia f una funzione intera che ammette uno svilupo finito in un certo $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora f è un polinomio.

R:

(iii) Esiste una funzione intera f su $\mathbb{C}$ la cui immagine sia il semipiano superiore $\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} > 0\}$.

R:

(iv) La funzione $\sin(\frac{z}{z+1})$ ha una singolarità essenziale in $z = -1$.

R:

(v) Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione analitica sul disco tale che $f(0) = 0$. Allora f è l'identità.

R:

Esercizio 2. *(7 punti)*

1. *Si dia un'enunciato della formula globale di Cauchy e del teorema di Cauchy per l'invarianza omologica e si dimostri che i due risultati sono equivalenti.*

2. *Si dia una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra usando la Analisi Complessa.*

Esercizio 3. *(4 punti) Si calcoli l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Esercizio 4. *(4 punti) Sia f una funzione intera e n un numero intero positivo. Si dimostri che esiste una funzione intera g tale che $g^n = f$ se e soltanto se gli zeri di f hanno ordine divisibile per n.*

Esercizio 5. *(3 punti) Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$.*
Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di f nelle seguenti regioni:

(i) $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(ii) $R_3 := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$.

Esercizio 6. *(3 punti) Calcolare $\int_\gamma \frac{z}{(z+1)(z-2)^2} dz$, dove γ è:*

(i) la circonferenza di centro $z = 2$ e raggio 1.

(ii) la circonferenza di centro $z = i$ e raggio 1.

Esercizio 7. *(5 punti) Sia $\underline{\sqrt[n]{z}}$ la funzione analitica globale i cui rami sono gli elementi di funzione $(U, \sqrt[n]{z})$ dove U è un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $\sqrt[n]{z}$ è una funzione olomorfa su U tale che $(\sqrt[n]{z})^n = z$ per ogni $z \in U$. Si dimostri che*

(i) il dominio di definizione di $\underline{\sqrt[n]{z}}$ è $\mathbb{C}^*$;

(ii) $\underline{\sqrt[n]{z}}$ non è banale;

(iii) $\underline{\sqrt[n]{z}}$ è algebrica.