Corso di laurea in Matematica - A.A. 2017/2018

AC310 - Analisi Complessa - Terzo Appello di Esame: 19/09/2018

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*8 punti*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Non esiste $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

R:

(ii) Sia f *una funzione intera che si annulla lungo* $\mathbb{R}$*. Allora* f *è la funzione nulla.*

R:

(iii) La funzione $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z^4+1)}$ *ammette uno sviluppo in serie di Laurent valido in* $\mathbb{C}^*$.

R:

(iv) La funzione $f(z) = \sin(\frac{z+1}{z})$ *ha una singolarità essenziale in* $z = 0$.

R:

(v) Un'automorfismo di $\mathbb{D}$ *che fissa* $I = [-1, 1]$ *è necessariamente l'identità.*

R:

(vi) La superficie di Riemann associata alla funzione analitica globale $\underline{\log}$ *ha un numero finito di rami.*

R:

Esercizio 2. *(6 punti)*

(i) *Si dia un'enunciato del principio dell'argomento.*

(ii) *Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra usando il principio dell'argomento.*

(iii) *Dimostrare che se* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *è un polinomio con coefficienti reali e se* $a+ib$ *è una radice di* $p(z)$*, allora anche* $a - ib$ *è una radice di* $p(z)$*.*

Esercizio 3. *(4 punti) Si consideri la serie* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$.

(i) *Si determini la regione di convergenza di* f*.*

(ii) *Si determini, giustificando, una formula per la derivata di* f*, determinandone il raggio di convergenza.*

Esercizio 4. *(4 punti) Determinare la funzione razionale* $f(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$ *che ha per coefficienti di Taylor i numeri di Fibonacci* F_n*, dati da* $F_0 = F_1 = 1$ *e* $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ *per* $n \geq 2$*.*

*(*Sug.: Considerare lo sviluppo in serie di Taylor di $f_1(z) = zf(z)$ e di $f_2(z) = z^2 f(z)$).

Esercizio 5. *(5 punti) Sia* U *un aperto connesso e* f *una funzione olomorfa in* U*.*

(i) *Dimostrare che se* U *è semplicemente connesso, allora esiste una primitiva* $F : U \to \mathbb{C}$ *di* f *su* U*.*

(ii) *Dimostrare che se* U *non è semplicemente connesso, allora non esiste necessariamente una primitiva di* f *su* U*.*

Esercizio 6. *(5 punti) Consideriamo la funzione meromorfa* $f(z) = \frac{\cos(z^2)}{z^5}$.

(i) *Classificare le singolarità di* f*.*

(ii) *Determinare lo sviluppo di* f *in serie di Laurent in* $\mathbb{C}^*$*.*

(iii) *Calcolare l'integrale*

$$\int_\gamma f(z)$$

dove γ *è la circonferenza* $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$*, percorsa in senso orario.*

Esercizio 7. *(4 punti) Calcolare con il metodo dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$