Classificazione degli aperti connessi di $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ studio globale delle funzioni analitiche

<u>Obbiettivo</u>: classificare $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto a meno di isomorfismi analitici o biolomorfismi.

<u>Ric.</u> Siano U, V aperti di $\mathbb{C}$ e sia $f: U \to V$ analitica

Allora f e' un isomorfismo analitico / biolomorfismo

se $\exists\ g: V \to U$, analitica t.c.

$$f \circ g = id_V \qquad \rightsquigarrow U \cong V.$$
$$g \circ f = id_U$$

$\rightsquigarrow$ Se $U = V$, f e' detto automorfismo e scriviamo $\mathrm{Aut}(U)$ per indicare l'insieme degli automorfismi di U.

Lo studio che faremo si basa sui seguenti due teoremi, di cui non faremo la dimostrazione:

Teorema 1 [Teorema della mappa di Riemann] (X, Lang)

Sia $U \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso.
Allora ci sono due possibilità:

i) $U = \mathbb{C}$

ii) $U \subsetneq \mathbb{C} \Rightarrow U \underset{\text{biolomorfo}}{\cong} \mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$, disco.

Teorema 2 [Teorema di uniformizzazione]

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Allora ci sono due possibilità:

i) $|\mathbb{C} - U| = 0, 1 \Rightarrow \underset{\text{riv. univ.}}{\tilde{U}} = \mathbb{C}$ come spazio topologico e $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ è olomorfa.

ii) $|\mathbb{C} - U| \geq 2 \Rightarrow \tilde{U} = \mathbb{D}$ e $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ è olomorfa.

Oss. Teorema 2 (i)

$U = \mathbb{C} - \{z_0\}$. Allora $U \cong \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$z \longmapsto z - z_0$

In questo caso il rivestimento universale è dato dalla mappa esponenziale:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \ , \text{ olomorfa.}$$
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} /_{2\pi i \mathbb{Z}}$$

e $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z} \ (\cong 2\pi i \mathbb{Z})$

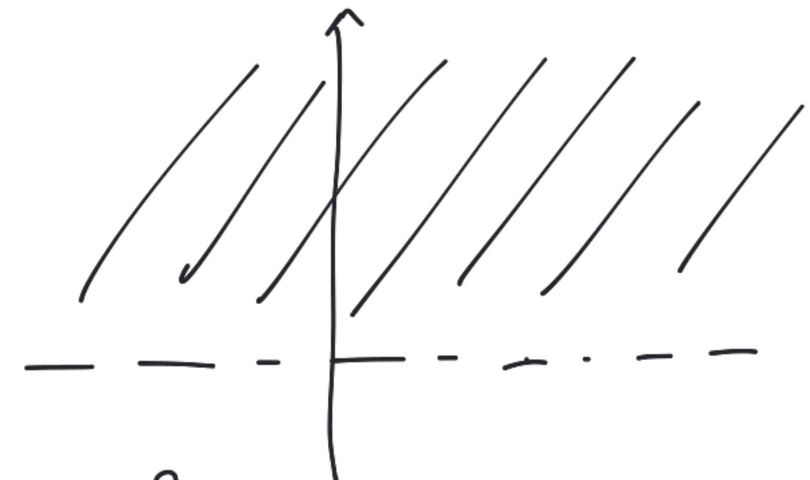
$(\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}))$

$\rightsquigarrow$ $\pi_1(\mathbb{C}^*) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$
$(\ldots)$

l'azione di $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ su $\mathbb{C}$ è libera e propriamente discontinua e agisce come biolomorfismi.
$(\ldots)$

Esempio [Trasformata di Cayley]

Sia $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$



Semipiano superiore

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \\ -i\,\frac{w+1}{w-1} &\longleftarrow w \end{aligned}$$

Esercizio: è un isomorfismo.

Trasformazioni lineari fratte

Obbiettivo: studiare, data una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

(quindi con $ad - cb \neq 0$)

la seguente applicazione associata (una trasformazione lineare fratta).

$$F_{(a,b,c,d)} = F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1) $F_{(a,b,c,d)} = F_{(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$

2) Se $F_{(a,b,c,d)} = F_{(a',b',c',d')} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : (a',b',c',d') = \lambda(a,b,c,d)$.

esercizio

3) F è ben definita per $z \neq -\frac{d}{c}$

3) $F'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \ \forall z \neq -\frac{d}{c}$

quindi F è un isomorfismo intorno a tutti i punti dove è definita e la sua immagine è $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$:

$$F : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\frac{dw-b}{-cw+a} \longleftarrow w$$

$\therefore F^{-1}$ è associata alla matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

In realtà quindi il modo migliore di pensare è considerare F come una trasformazione da $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in S:

$$F : \quad S \longrightarrow S$$

$$-\frac{d}{c} \neq z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{c} &\longmapsto \infty \\ \infty &\longmapsto \frac{a}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{se } c \neq 0$$

oppure

$$\infty \longmapsto \infty \qquad \text{se } c = 0$$

$\rightsquigarrow$ F così definita stabilisce una biezione di S con se stesso.

Consideriamo le seguenti trasformazioni lineari fratte particolari:

$$\begin{cases} T_b(z) = z+b & \rightsquigarrow \text{traslazione per } b \\ J(z) = \dfrac{1}{z} & \rightsquigarrow \text{inversione} \\ M_a(z) = az, \ a \neq 0 & , \text{ moltiplicazione per } a. \end{cases}$$

- $\boxed{J}$ - trasforma la circonferenza unitaria in se stessa
  - manda $\mathbb{D}$ in $S \setminus \mathbb{D}$

$$0 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 0$$

- $\boxed{M_a}$ scrivendo $a = re^{i\theta}$, M_a si può vedere come una dilatazione composta con una rotazione

E' vero ancora di più:

<u>Teorema</u> Data una trasformazione lineare fratta F, esistono numeri complessi α, β, γ t.c. o $F = \alpha z + \beta$, oppure

$$F(z) = T_\gamma \circ \Pi_\alpha \circ J \circ T_\beta .$$

<u>dim</u> Sia $F(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Supp $c=0$, allora $F(z) = \dfrac{az+b}{d}$ e, se $\alpha = \frac{a}{d}$ e $\beta = \frac{b}{d}$, vediamo che $F(z) = T_\beta \circ M_\alpha$.

Supp $c \neq 0 \rightarrow$ facciamo $c=1$ senza perdita di generalità: (oss 1)

$F(z) = \dfrac{az+b}{z+d}$. Sia $\beta = d$. Allora $T_\gamma \circ \Pi_\alpha \circ J \circ T_\beta (z) = \dfrac{\alpha}{z+d} + \gamma$

$\Rightarrow \dfrac{az+b}{z+d} = \dfrac{\alpha}{z+d} + \gamma$, che ammette varie soluzioni:

e.g. $\gamma = a$ e $\alpha = b - ad \neq 0$.

$\boxtimes$

Def Una retta in $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è una retta in $\mathbb{C}$ unita con il punto ∞.

Teorema Una trasformazione lineare fratta trasforma $\{\text{rette in } S\} \cup \{\text{cerchi}\}$ in $\{\text{rette in } S\} \cup \{\text{cerchi}\}$.

dim Per il teorema precedente, basta mostrare il risultato

per
- traslazioni ✓
- moltiplicazioni ✓
- inversioni:

Sia $w = \frac{1}{z} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v}$.

Ma un cerchio o una retta è il luogo delle soluzioni di

$A(u^2+v^2) + Bu + Cv = D$, in (u,v), con non tutte le costanti A, B, C, D nulle.

$\Rightarrow A \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + B \frac{x}{x^2+y^2} + C \frac{-y}{x^2+y^2} = D \Leftrightarrow A + Bx - Cy = D(x^2+y^2)$

eq. di una retta o un cerchio nelle coordinate (x,y). ⊠

Esempio Sia $F(z) = az+b$.
Allora ∞ è un punto fisso di F:

$$\left(h(t) = F\left(\frac{1}{z}\right) = a\frac{1}{z} + b \quad e \quad h(0) = \infty \right)$$

inoltre è l'unica trasformazione lineare fratta che fissa ∞:

Teorema Sia F una trasf. lineare fratta che ha ∞ come punto fisso. Allora $\exists$ numeri complessi a e b t.c.

$$F(z) = az + b.$$

dim Sia $F(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Se $c \neq 0$, allora $F(\infty) = \dfrac{a}{c} \neq \infty$

$$\left(\frac{a\frac{1}{t}+b}{c\frac{1}{t}+d} = \frac{a+tb}{c+td} \xrightarrow[t=0]{} \frac{a}{c} \right)$$

Quindi $c = 0$, e

$$F(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

$\checkmark$ $\blacksquare$

Prop. Sia F una trasformazione lineare fratta. Se F ha 3 punti fissi, allora F è l'identità.

dim

Supp. che ∞ è uno dei punti fissi di F. Allora $F(z) = az + b$. Supp. che $z_1 \in \mathbb{C}$ è un'altro punto fisso.

Allora $az_1 + b = z_1 \Rightarrow (1-a)z_1 = b$.

Quindi, se $a \neq 1$, $z_1 = \frac{b}{1-a}$ è l'unico punto fisso di F in $\mathbb{C}$. ↯

$\Rightarrow a = 1$ e $b = 0 \Rightarrow F(z) = z$ è la mappa identità.

Supp. adesso che ∞ non è un punto fisso di F, quindi $c \neq 0$.

Sia $z \in \mathbb{C}$ un punto fisso di F. Allora $c \neq 0$ e z soddisfa

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (a-d)z + b = 0 \Rightarrow z \text{ è una}$$

soluzione di questa equazione quadratica, che ha al massimo 2 soluzioni! ↯

Teorema Siano $z_1, z_2, z_3 \in S$ punti distinti e siano w_1, w_2, w_3 punti distinti di S.
Allora $\exists!$ F trasf. lineare fratta t.c. $F(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

dim. Per il lemma precedente, sappiamo che una tale F, se esiste, è unica. Infatti, date due trasf. lin. fratte F e G t.c. $F(z_i) = G(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, allora la trasf. lineare fratta $F \circ G^{-1}$ fissa z_1, z_2 e z_3, quindi per il lemma

$F \circ G^{-1} = id_S \Rightarrow F = G$.

Per mostrare l'esistenza costruiamo F esplicitamente:

1) La funzione $z \longmapsto \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ manda $\begin{cases} z_1 \text{ in } 0 \\ z_2 \text{ in } \infty \end{cases}$

2) La funzione $z \longmapsto \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ manda $\begin{cases} z_1 \text{ in } 0 \\ z_2 \text{ in } \infty \\ z_3 \text{ in } 1 \end{cases}$

3) Se $w = F(z)$ trasforma z_i in w_i, per $i = 1, 2, 3$, allora z e w soddisfano:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \, \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \, \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} . \qquad (\ldots)$$

<u>Esempio</u> Trovare la trasf. lineare fratta F t.c.

$$F(1) = i, \quad F(i) = -1, \quad F(-1) = 1 .$$

Dalla formula
$$\frac{w - i}{w + 1} \, \frac{1 + 1}{1 - i} = \frac{z - 1}{z - i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - 1}$$

otteniamo che
$$w = \frac{z\,(1 + 2i) + 1}{z + (1 - 2i)} .$$