Automorfismi di $\mathbb{C}$

Ric. che $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \sim$

Usiamo questa presentazione dell'estensione di $\mathbb{C}$ a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ per studiare gli automorfismi, come restrizione di quelli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Sia $GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\}$

Allora $GL_2(\mathbb{C})$ agisce in $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ tramite isomorfismi lineari: $GL_2(\mathbb{C}) \circlearrowright \mathbb{C}^2 - \{0\}$:

$$GL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 - \{0\} \xrightarrow{\cdot M} \mathbb{C}^2 - \{0\}$$
$$(M, (z_1, z_2)) \longmapsto M (z_1, z_2)^T.$$

Sia $PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C}) / \underbrace{\{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}}_{\text{centro di } GL_2(\mathbb{C})}$

Allora l'azione di $GL_2(\mathbb{C})$ su $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ discende a un'azione di $PGL_2(\mathbb{C})$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{C}) & \circlearrowright & \mathbb{C}^2 - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ PGL_2(\mathbb{C}) & \circlearrowright & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array} :$$

$$PGL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right], [z_0 : z_1] \right) \longmapsto [a z_0 + b z_1 : c z_0 + d z_1]$$

$$\|$$

E' ben definita:

dato $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $\left(\left[\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \right], [z_0 : z_1] \right) \longmapsto [\lambda a z_0 + \lambda b z_1 : \lambda c z_0 + \lambda d z_1]$

Allora usando l'identificazione $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$z \mapsto [z:1] \quad ,$$

e $\quad \infty = [1:0]$

allora l'azione di $PGL_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}$ è tale che

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \cdot [z:1] = [az+b : cz+d] \quad ,$$

quindi $$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \cdot (z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{se } c=0 \text{ oppure } c\neq 0 \text{ e } z\neq -\dfrac{d}{c} \\ \infty & \text{se } c\neq 0 \text{ e } z=-\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

e $$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \cdot \underset{[1:0]}{\overset{\infty}{\parallel}} = \begin{cases} \dfrac{a}{c} & \text{se } c\neq 0 \\ \infty & \text{se } c=0 \end{cases} .$$

Proprietà (1) L'azione di $PGL_2(\mathbb{C})$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è libera e transitiva (1 sola orbita).

(2) Lo stabilizzatore di ∞ è

$$\mathrm{Stab}(\infty) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] : \begin{matrix} a,d \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] : \begin{matrix} a \in \mathbb{C}^*, \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (z) = az+b$$

(3) Punti fissi di $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \longleftrightarrow \left\{ \text{autovettori di } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

dim (1) basta mostrare che $\forall w \in \mathbb{C}, \exists [A] \in PGL_2(\mathbb{C})$ t.c.

$$A \cdot \infty = [w : 1].$$

$$\infty \xrightarrow[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]{} 0 \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]{} w$$

$$z \xrightarrow[\text{inversione}]{} \frac{1}{z} \qquad z \xrightarrow[\text{traslazione}]{} z+w$$

$$z \xleftarrow{A_z} \infty \xrightarrow{A_w} w$$

$$[A_w] \circ [A_z]^{-1}$$

Altre proprietà:

1. $PGL_2(\mathbb{C})$ è generato da traslazioni, moltiplicazioni e l'inversione.
2. $PGL_2(\mathbb{C})$ agisce in maniera libera e transitiva su triple di elementi distinti in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.
3. $PGL_2(\mathbb{C})$ preserva $\{$rette in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\} \cup \{$cerchi$\}$

(esercizio).

Consideriamo adesso

$Aut(\mathbb{C})$ = automorfismi analitici di $\mathbb{C}$
(o biolomorfismi)

$= \{ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e bijettiva $\}$

Criterio di isom. globale

Teorema

(Teor. 3.3 V Lang)

(1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{ z \mapsto az+b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \}$

$= \{ f \in PGL_2(\mathbb{C}) \mid f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \}$

$= \{ f \in PGL_2(\mathbb{C}) \mid f(\infty) = \infty \}$

(2) $f \neq id$, $z \mapsto az+b$ ha un punto fisso in $\mathbb{C} \Leftrightarrow a \neq 1$ e in questo caso l'unico punto fisso è $z = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$.

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \circlearrowright \mathbb{C}$ transitivamente e $\mathrm{Stab}(0) = \{ z \mapsto az \} \cong \mathbb{C}^*$

dim

(3) ok

(2) ok

(1) $\supseteq$) perché $\{ z \mapsto az+b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \} = \mathrm{Stab}(\infty)$.

$\subseteq$) Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Componendo con una traslazione, posso assumere che $f(0)=0$.

Sia $h: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto f(\frac{1}{z})$

<u>Claim</u>: h non ha una singolarità essenziale in $z=0$

Infatti, $f(0)=0$ e $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow f : U_0 \xrightarrow{\cong} V_0$ intorni di 0

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon, \delta$ t.c. $|w| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(w)| > \varepsilon$

$\underset{w = \frac{1}{z}}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon, \delta$ t.c. $|z| < \delta \Rightarrow |h(z)| = |f(\frac{1}{z})| > \varepsilon$

$\Longrightarrow \exists\, D_\delta(0)$ t.c. $\overline{h(D_\delta(0))} \not\ni 0$.

$\underset{\text{Casorati-Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ h non ha singolarità essenziali in 0.

Sia $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ lo sviluppo di f in serie di potenze in 0.

$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$ sviluppo in serie di Laurent di h in 0.

h non ha sing. essenziale in $0 \Rightarrow a_n \neq 0$ solo per un numero finito di indici $n \Rightarrow f$ e' un polinomio.

Siccome f e' iniettiva, f ha solo un $0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = a z^m \quad e \ m = 1.$$

$\blacksquare$

Automorfismi del Disco unitario

Sia $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$.

Teorema [Lemma di Schwarz]

Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa (non nec. un automorfismo) t.c. $f(0) = 0$. Allora

(i) $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{D}$;

(ii) se $\exists \, z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ t.c. $|f(z_0)| = |z_0|$, allora $f(z) = az$, con $|a| = 1$.

dim Sia

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{f(z)}{z}$$

Allora g è olomorfa $\leftarrow$ può estendersi a una funz. olomorfa

perché $f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=0}}{=} a_1 z + \dots$

i) Quindi, dato $z \in \partial D_R(0)$, con $R<1$,

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \underset{|z|=R}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{|f(z)|}{R} \underset{f(z)\in\mathbb{D}}{\underset{\uparrow}{<}} \frac{1}{R}.$$

Per il principio del massimo modulo

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{D_R(0)}, \quad |g(z)| < \frac{1}{R} \Leftrightarrow |f(z)| < \frac{|z|}{R}$$

$$\underset{R\to 1^-}{\leadsto} \quad |f(z)| \leqslant |z|, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

ii) Se z_0 è tale che $|f(z_0)| = |z_0|$, allora

z_0 è un massimo per $|g|$ in $\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ g è costante, quindi $g = a$ in $\mathbb{D}$, con $|a| = 1$

$\Rightarrow$ $f(z) = az$ in $\mathbb{D}$, con $|a| = 1$. ∎

Teorema

involuzione scambia 0 e α manda $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D}$

1) $$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \longmapsto \overbrace{e^{i\varphi}}^{\text{rotazione angolo } \varphi} \overbrace{\frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha} z}}^{g_\alpha} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{D} \right\} \leq GL_2(\mathbb{C})$$

↳ matrice $\begin{pmatrix} -e^{i\varphi} & e^{i\varphi}\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$

1) bis $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{ f \in PGL_2(\mathbb{C}) : f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \}$

2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \circlearrowright \mathbb{D}$ transitivamente e $\mathrm{stab}(0) = \{e^{i\varphi}\} \simeq S^1$

__dim__ 1) $\supseteq$ esercizio

$\subseteq$ Sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Componendo con $g_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ per un certo α, posso supporre che $f(0)=0$.

Schwarz Lemma (i) $\Rightarrow \begin{cases} |f(z)| \leq |z| \\ |f^{-1}(z)| \leq |z| \end{cases}, \forall z \in \mathbb{D}$

$$\Downarrow$$

$$|z| \leq |f(z)|, \forall z \in \mathbb{D}$$

Ma allora per Schwarz (ii)

$$f(z) = az, \quad \text{con } |a| = 1$$

$$\Rightarrow f(z) = e^{i\varphi}, \quad \text{con } \varphi = \arg a.$$

2) Chiaro (esercizio)

(1 bis) senza dimostrazione. $\blacksquare$