II. §5. Differenziazione di serie di potenze

Sia f una funzione analitica in $D(a,R)$ e sia $, R>0$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n}$$ lo sviluppo di f in $D(a,R)$.

Vedremo che f è anche olomorfa in $D(a,R)$ e che

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n\geq 1} n\, a_n (z-a)^{n-1}}$$ in $D(a,R)$

Teorema (5.1 di Lang) Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$, con raggio di conv. $R>0$. Allora:

i) La serie $\sum_{n\geq 1} n a_n (z-a)^{n-1}$ ha raggio di conv. R;

ii) La funzione f è olomorfa in $D(a,R)$ e

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n\, a_n (z-a)^{n-1}.$$

dim Supponiamo per semplicità che $a=0$.

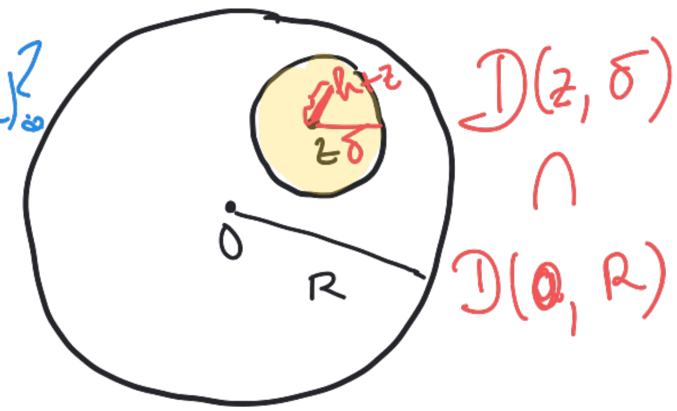
i) Per ipotesi, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ha raggio di convergenza $R>0$

quindi $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

Ma, siccome $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$, abbiamo che

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$
$$= \limsup |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}.$$

$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza dim (ii) Sia z: $|z|<R$ e $\delta>0$: $|z|+\delta<R$. $\rightsquigarrow$ f è olomorfa in $z\in D(0,R)$?



Consideremo numeri complessi h t.c. $|h|<\delta$. Abbiamo:

$$f(z+h)=\sum a_n(z+h)^n$$
$$= \sum a_n \left(z^n + n z^{n-1}h + h^2 P_n(z,h)\right), \text{ con}$$

$$P_n(z,h)=\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k},$$ polinomio a coefficienti interi positivi.

Inoltre,

$$|P_n(z,h)| \le \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} |h|^{k-2}|z|^{n-k} \le \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k-2}|z|^{n-k}}_{\text{non dipende da } h}$$
$$= P_n(|z|,\delta).$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(z+h)-f(z)}_{f(z)=\sum a_n z^n} - \underbrace{\sum_{n\ge1} n a_n z^{n-1} h}_{\text{convergente}} = \underbrace{h^2 \sum_{n\ge2} a_n P_n(z,h)}_{\text{che è convergente}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n\ge1} n a_n z^{n-1} = h\sum_{n\ge2} a_n P_n(z,h)$$

$$= P_n(|z|, \delta).$$

non dipende da h

$$\Rightarrow \underset{= \sum a_n z^n}{f(z+h) - f(z)} \underbrace{- \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} h}_{\text{convergente}} = \underbrace{h^2 \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z,h)}_{\text{che è convergente}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \underbrace{h \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z,h)}$$

Ma se $|h| < \delta$, $\left| \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z,h) \right| \leq \underbrace{\sum_{n \geq 2} |a_n| P_n(|z|, \delta)}_{\text{non dipende da } h}$

costante

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{h \to 0}} \, \overset{\to 0}{h} \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z,h) = 0$$

$$\left(\text{infatti } 0 \leq |h| \left| \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z,h) \right| \leq \underbrace{|h| \sum_{n \geq 2} P_n(|z|, \delta)}_{\to 0} \right)$$

Concludiamo quindi che f è differenziabile e che

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}}$$ in $D(0,r)$. ■

OSS. Dal teorema otteniamo anche che se f è analitica in un aperto U qualsiasi, allora f è olomorfa in U e f' è analitica in U.

OSS. Il teorema integrale di Cauchy, che mostreremo tra qualche settimana, avrà come conseguenza che vale anche il vice-versa, i.e. che ogni funzione olomorfa è anche analitica.

Corollario Se f è analitica in un aperto $U \subset \mathbb{C}$, allora f possiede derivate di ogni ordine, e queste sono funzioni analitiche (e quindi olomorfe) in U.

Inoltre, se $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ in $D(a,R)$, allora

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1)\, a_n\, (z-a)^{n-k} \quad \text{in } D(a,r)$$

è il coeff costante di

$$\text{e} \quad f^{(k)}(a) = k!\, a_k \implies \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}.$$

Def Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione con $U \subset \mathbb{C}$ aperto.
Una primitiva per f e' una funzione olomorfa in U t.c.
$\boxed{g'(z) = f(z)}$, $\forall z \in U$.
$\to$ una primitiva sarà determinata a meno di costante additiva.

Prop. Sia $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ in $D(a,r)$. Allora f possiede una primitiva g in $D(a,r)$, che è analitica.

dim La serie $g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$, se convergente, e' tale che $g'(z) = f(z)$.
Ma infatti g e' convergente perché $\left| \frac{a_n}{n+1} \right| \leq |a_n|$, quindi la conv. assoluta di f implica la conv. assoluta di g in $D(a,r)$

Concludiamo quindi che g e' una primitiva per f in $D(a,r)$. ■

<u>OSS.</u> (<u>Importante</u>) La prop. implica che una funzione analitica ammette sempre una primitiva locale intorno a quel punto.

Non vuol dire però che una funzione analitica su un'aperto U ammetta primitive locali che si incollano in modo da definire un'unica funzione olomorfa in U.

<u>Esempio</u> Sia $f(z) = \frac{1}{z}$, olomorfa in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ma $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} =$

$= \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(z_0)^n} (z - z_0)^n$, che è conv. in $D(z_0, R)$,

con $1/R = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{|z_0|^n}} = \frac{1}{|z_0|} \Rightarrow \boxed{R = |z_0|}$

Questa funzione, quindi, ammette una primitiva su $D(z_0, |z_0|)$)

si chiamerà <u>un</u> logaritmo in $D(z_0, |z_0|)$

Vedremo che: Non esiste un logaritmo su $\mathbb{C}^*$.

Funzioni esponenziale e logaritmo

1) La funzione esponenziale

$$\underset{\substack{\uparrow \\ z=x+iy}}{e^z =} e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad \text{è periodica},$$

i.e., $\exists\, p \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+p} = e^z \iff e^z \cdot e^p = e^z$.

Tale p deve essere tale che $e^p = 1 \iff p = it$, $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ I periodi di e^z sono i multipli interi di $2\pi i$.

2) Sia $w \in \mathbb{C}$. Un logaritmo di w è un numero complesso z t.c. $\boxed{e^z = w}$.

Siccome $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $w = 0$ non ha logaritmo.

Se $w \neq 0$, $\boxed{e^z = w} \underset{\substack{\uparrow \\ z=x+iy}}{\Rightarrow} e^x \cdot e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = \dfrac{w}{|w|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \log |w|} \\ \boxed{y = \arg w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

infinite soluzioni

complesso z t.c. $e^z = w$

Siccome $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $w=0$ non ha logaritmo.

Se $w \neq 0$, $e^z = w \Rightarrow e^x \cdot e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$

$z = x+iy$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = \frac{w}{|w|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log|w| \\ y = \arg w + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

infinite soluzioni

- Ogni tale soluzione è detta determinazione dell'argomento di w
- La determinazione che soddisfa $0 \leq \theta < 2\pi$ si dice determinazione principale dell'argomento di w e si denota con $\operatorname{Arg}(w)$

$$\leadsto \log(w) = \log|w| + i(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi), \; k \in \mathbb{Z}$$

e $\operatorname{Log}(w) = \log|w| + i\operatorname{Arg}(w)$ è detta determinazione principale del logaritmo o solo logaritmo principale.