Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analise Complessa - Esercitazione 1
Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Calcolare parte reale, parte immaginaria, coniugato, modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:*

(i) $w = i^{17}$;

(ii) $z = \frac{i-4}{2i-3}$;

(iii) $z = (1+i)^6$;

(iv) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$;

(v) $z = i^5 + i + 1$;

(vi) $u = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7$;

(vii) $z = \frac{(1+i)(3-3i)}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5}$.

Esercizio 2. *Calcolare:*

(i) *le radici quadrate di* $z = -1 - i$;

(ii) *le radici cubiche di* $z = -\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$.

Esercizio 3. *Mostrare che non esiste alcun numero complesso* z *tale che*

$$|z| - z = i.$$

Esercizio 4. *Mostrare che* $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ *se* $|a| = 1$ *oppure se* $|b| = 1$.

Esercizio 5. *Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ossia che dati numeri complessi* $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$,

$$|z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n|^2 \leq (\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2).$$

Suggerimento*: notare che* $\sum_{j=1}^{n} |z_j + \lambda \bar{w}_j|^2 \geq 0$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$ *arbitrario. Per concludere scegliere* λ *opportuno.*

Esercizio 6. *Sia* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri complessi e siano* x_n *e* y_n *le parti reale e immaginaria di* z_n*, rispettivamente. Dimostrare che*

(i) $\{z_n\}$ *è convergente se e solo se sono convergenti* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$.

(ii) $\{z_n\}$ *è di Cauchy se e solo se sono di Cauchy* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$.

Esercizio 7. *Verificare, utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann, che le seguenti funzioni sono olomorfe e determinare la loro derivata.*

(i) $f(z) = e^{z^2}$;

(ii) $f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}}$;

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$;

(iv) $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$.

Esercizio 8. *Siano* $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *funzioni che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.*

(i) Mostrare che u *e* v *sono armoniche, cioè, che hanno Laplaciano uguale a* 0.

(ii) Mostrare che il Jacobiano di (u, v) *è uguale a* $|f'(z)|^2$.

Esercizio 9. *Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche e trovare una loro armonica coniugata.*

(i) $u(x, y) = xy$;

(ii) $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$;

(iii) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2}\cos(2xy)$;

(iv) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

(v) $u(x, y) = arctan(y/x)$,$x > 0$.