Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 2

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:*

(i) $e^z = 1$;

(ii) $e^z = i$;

(iii) $e^z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'immagine attraverso la funzione esponenziale dei seguenti insiemi:*

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < Im(z) < \theta_2, \theta_2 - \theta_1 \in]0, 2\pi[\}$;

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, 0 < Im(z) < 2\pi\}$.

Esercizio 3. *Sia $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n$ una serie di potenze formali a coefficienti in $\mathbb{C}$.*

(i) Mostrare che vale la formula di Taylor, i.e., che $a_n = \frac{D^{(n)}(0)}{n!}$, dove D è l'operatore lineare che definisce la derivata formale della serie.

(ii) Data una serie di potenze formali $g = \sum_{n\geq 1} b_n T^n$, con $\text{ord(g)} \geq 1$, si dia una formula per la serie composta $f \circ g(T)$ e se dimostri che g ammete un inverso per la composizione se e soltanto se si ha che $\text{ord(g)} = 1$.

Esercizio 4. *Determinare i termini di ordine minori o uguali a 3 delle serie di Laurent formali di:*

(i) $\exp(T)\sin(T)$;

(ii) $\frac{\exp(T)-1}{T}$

(iii) $\frac{\cos(T)}{\sin(T)}$

Esercizio 5. *Sia $m \in \mathbb{N}$ e si definisca la consideri la serie di potenze formale*

$$B_{\frac{1}{m}}(T) = (1+T)^{\frac{1}{m}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{m}}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\dots(\frac{1}{m}-n+1)}{n(n-1)\dots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

(i) Dimostrare che vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$\left(B_{\frac{1}{m}}(T)\right)^m = 1 + T.$$

(ii) Discutere se $B_{\frac{1}{m}}(T)$ è invertibile in $\mathbb{C}[[T]]$.

Esercizio 6. *Sia* w *un numero complesso e consideriamo la sucessione* $\{a_n\} = \{w^n\}$. *Dimostrare che* $\{a_n\}$ *è divergente se* $|w| > 1$ *e che converge a* 0 *se* $|w| < 1$.

Esercizio 7. *Discutere l'esistenza di* $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.