Esercitazione 2

1 i) $\boxed{e^z = 1}$

$$z = x+iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$e^x \cdot e^{iy} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |e^x| = e^x = 1 \\ y = \underset{\substack{\shortparallel \\ \arg(1)}}{0} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{z = i\, 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

1) iii) $e^z = Re^{i\theta}$ è impossibile se $R=0$

Invece se $R>0$, abbiamo che

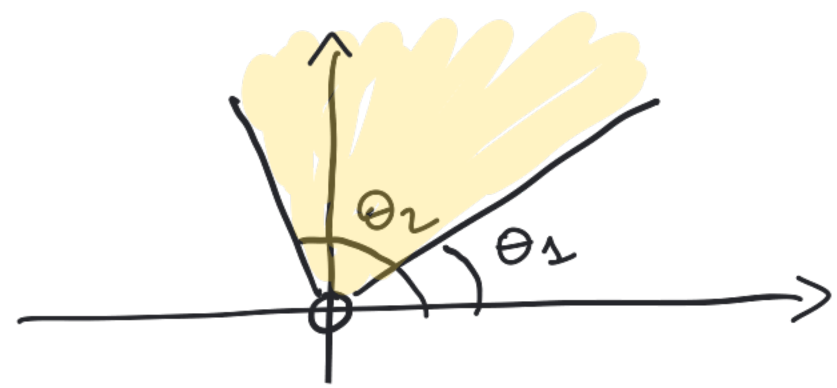
$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = Re^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = R \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln(R) \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = \ln(R) + (\theta + 2k\pi)i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

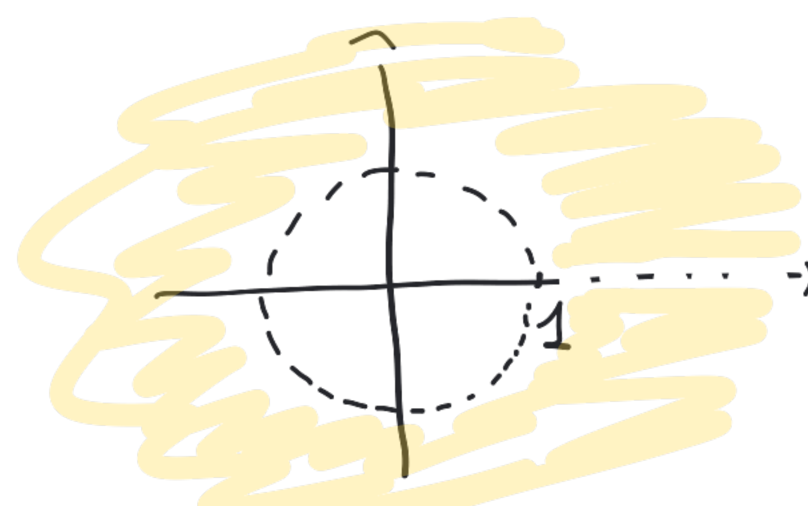
2 i) L'immagine di A è

$$\{ z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} : R > 0 \text{ e } \theta_1 < \theta < \theta_2 \}$$



ii) L'immagine di B è

$$\{ z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} : R > 1 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi \}$$



3 i) Sia $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n$ e sia

$$D : \mathbb{C}[[T]] \longrightarrow \mathbb{C}[[T]]$$
$$f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n \longmapsto \sum_{n\geq 1} n a_n T^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} T^n$$

$\underline{\text{OSS}}$ $\forall f = \sum_{n\geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$, $\underbrace{f(0) = a_0}$.

Il risultato segue se mostriamo che

$$\circledast \left[D^{(n)} f(T) = \sum_{m\geq 0} b_m T^n, \text{ dove} \right.$$

$$b_m = (m+n)(m+n-1) \dots (m+1).$$

(poiché allora $b_0 = n!$).

$\rightarrow \circledast$ segue facilmente (per esempio per induzione).

D'altra parte, se $\mathrm{ord}(g)=1 \iff b_1 \neq 0$, si vede che chiedere che $f\circ g(T) = T$ si può tradurre in un problema di algebra lineare: le incognite sono le a_i, coefficienti sono prodotti degli b_i.

Usando ⊗ vediamo che i termini $a_0, \dots, a_n$ di f devono essere tali che $a_0 = 0$ e $a_1, \dots, a_n$ sono soluzione dell'equazione

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ b_2 & b_1^2 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ b_3 & 2b_1 b_2 & b_1^3 & & & & \\ & & & & & & 0 \\ b_n & \cdots & & & & & b_1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

che ha soluzione se $b_1 \neq 0$

(la matrice è triangolare inferiore con diagonale $(b_1, b_1^2, \dots, b_1^n)$.)

5 i) Si può fare con manipolazione analitica, ma è meglio vedere come è svolto su Lang II.3 (pag 64).

ii) $B_{\frac{1}{n}}(T)$ è invertibile se ha ordine 0, come abbiamo visto a lezione. E' chiaro che è così.