Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 3
Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. *Mostrare che, se* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, *allora la serie ha raggio di convergenza* R. *Discutere poi la convergenza di* $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Esercizio 2. *Sia* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tale che* $|\alpha| < 1$. *Determinare la somma della serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} \alpha^n$.

Esercizio 3. *Si consideri la serie di potenze per* $\log(1+x)$, *con* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, *e si consideri la analoga serie complessa sostituendo* x *con un numero* $z \in \mathbb{C}$. *Si mostri che la serie converge assolutamente per* $|z| < 1$. *Stessa domanda per* $\log(1-x)$.

Esercizio 4. *Discutere la convergenza delle seguenti serie di potenze.*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} z^{2n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. *Siano* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ *serie di potenze aventi raggi di convergenza rispettivamente* R_1 *e* R_2. *Cosa possiamo concludere riguardo il raggio di convergenza delle serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$*?*

Esercizio 6. *Siano* α *e* β *numeri complessi con* $|\alpha| < |\beta|$ *e si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 0} (3\alpha^n - 5\beta^n) z^n$. *Si determini il raggio di convergenza della serie.*

Esercizio 7. *Si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$. *Mostrare che il raggio di convergenza della serie è uguale a* 1 *e mostrare che la sua funzione somma è continua in* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.