Quindi, per il criterio del rapporto, concludiamo che la serie numerica $\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n$ e' convergente.

D'altra parte, se $|z|>R$, $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \frac{|z|^n}{|z|^{n+1}} = \frac{R}{|z|} < 1$

$\underset{\text{c. rapporto}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n\geq 0} |a_n|\,|z|^n$ e' divergente.

Per definizione di raggio di convergenza, concludiamo che $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ha raggio di convergenza R.

- Usando questo criterio si conclude facilmente che la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ ha raggio di convergenza $R=e$.

Infatti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

(2) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$.

Allora $\sum \alpha^n$ e' convergente poiché assolutamente convergente ($\sum |\alpha|^n$ e' una serie geometrica reale con ragione $< 1$).

Come in Analisi reale, abbiamo che la successione delle somme parziali ha un'espressione che riusciamo a calcolare esplicitamente:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha}{\alpha - 1}$$

Quindi $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n \underset{|\alpha|<1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\alpha}{1-\alpha} = \sum_{n \geq 1} \alpha^n$.

(3) Per concludere che la serie ha raggio di convergenza $R = 1$, basta utilizzare ad esempio il criterio di Hadamard, i.e., calcolare $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{\otimes}{=} e^0 = 1$$

$$\otimes \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = 0$$

Quindi la serie $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

converge assolutamente per $z: \ |z| < 1$.

Analogamente si conclude che

$$\log(1-z) = \log\left(1+(-z)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

è assolutamente convergente per $z: \ |z| < 1$.

4) i) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} z^{2n}$ ha raggio di convergenza $R = \infty$.

Questo si può vedere in tanti modi diversi, ad esempio utilizzando un qualsiasi criterio dell'analisi reale per concludere che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} |z|^{2n}$ converge.

Ad esempio, usando il criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+2)!} |z|^{2n+2}}{\frac{3^n}{2n!} |z|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

quindi la serie converge per qualunque $z \in \mathbb{C}$.

• $\alpha \neq 0$ : usando il criterio che abbiamo dimostrato nell'esercizio 1, possiamo calcolare $R$ attraverso:

$\alpha > 0$

$$\lim \frac{\frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n}}{\frac{(n+1)^\alpha + e^{\alpha(n+1)}}{n+1}} = \lim \frac{(n+1)(n^\alpha + e^{\alpha n})}{n\left((n+1)^\alpha + e^{\alpha n} \cdot e^\alpha\right)} =$$

$$= \begin{cases} \alpha > 0 = \lim \frac{e^{\alpha n}}{e^{\alpha n} \cdot e^\alpha} = \frac{1}{e^\alpha} . \\ \alpha < 0 = \lim \frac{(n+1)n^\alpha}{n(n+1)^\alpha} = 1 \end{cases}$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a

$$\begin{cases} R = 1 & \text{se } \alpha \leq 0 \\ R = \frac{1}{e^\alpha} & \text{se } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

3 (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$ ha raggio di convergenza 1. Infatti:

Per $n$ abbastanza grande,

$1 \leq \log n \leq n$, quindi $1 \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{2}{n}}$.

Siccome $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{2}{n}} = 1$, concludiamo che $R = 1$.

(iv) $\sum \frac{\log(1+n^{\alpha})}{\sqrt{n}} z^n$

ha raggio di convergenza $R = 1$.

↳ Per esempio, usando l'esercizio 1 possiamo

calcolare $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \dots = 1$.

5. Mostrare, basandosi nella discussione su Lang, Th. 3.3, che in entrambi i casi il raggio di convergenza è maggiore o uguale al minimo tra $R_1$ e $R_2$.

7. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ ha raggio di convergenza $R = 1$.

Infatti, $\lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^2 = 1$.

D'altra parte, abbiamo che

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ e' convergente
- se $\overline{D} = \{ z \in \overline{D} : |z| \leq 1 \}$ e $f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$, $z \in \overline{D}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(z)\| = \sup_{z \in \overline{D}} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

$\to$ Quindi per il test di convergenza, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ e' <u>uniformemente convergente</u> per $z \in \overline{D}$.

Sappiamo quindi che la somma di $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ e' una funzione continua.