Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 4

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Si dimostri che, per qualsiasi numero complesso $z \in \mathbb{C}$, valgono le seguente identità:*

(i) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ *e* $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;

(ii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

(iii) $\sin' z = \cos z$;

(iv) $\cos' z = -sinz$.

Esercizio 2. *Risolvere le equazioni seguenti in* $\mathbb{C}$:

(i) $\cos z = 0$*;*

(ii) $\sin z = 0$.

(iii) $z = \log(1+i)$*;*

(iv) $z = \log(-\pi)$*;*

(v) $z = \log(e)$*;*

(vi) $i^{\sqrt{2}}$*;*

(vii) $(1-i)^{\sqrt{3}^i}$.

Nota: *Per gli ultimi due punti usare la seguente convenzione per l'esponenziazione complessa: dati $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, $a^b := \exp(b \log a)$.*

Esercizio 3. *Si considerino le serie di potenze $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e $g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Si dimostri che f e g soddisfano $f''(z) = f(z)$ (e $g''(z) = g(z)$) e si dia una caratterizzazione di tutte le funzioni analitiche complesse in 0, g, tali che $g''(z) = g(z)$ e $g(0) = 0$.*

Esercizio 4. *Sviluppare in serie di potenze le seguenti funzioni nel punto indicato e indicare il raggio di convergenza.*

(i) $f(z) = (2i+z)^{-3}$ *in* $z = 0$*;*

(ii) $g(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ *in* $z = i$*;*

(iii) $h(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ *in* $z = 0$*;*

(iv) $k(z) = \frac{1}{z-1}$ *in* $z = a$*, per* $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Suggerimento*: per il primo punto sfruttare l'uguaglianza* $f(z) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i+z})''$.

Esercizio 5. *(i) Per* $|z-1| < 1$, *mostrare che, se*

$$f(z) = \log z = \log(1 + (z-1)) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$

allora $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) Per $z_0 \neq 0$ *e* z *tale che* $|z - z_0| < 1$, *sia*

$$g(z) = \sum(-1)^{n-1}\frac{(\frac{z-z_0}{z_0})^n}{n}.$$

Mostrare che $g'(z) = \frac{1}{z}$.