Esercitazione 4

1) i) $$e^{iz}+e^{-iz} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} + \frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n+(-1)^n i^n}{n!} z^n$$

Se $n=2m$ è pari, $$i^{2m}+i^{2m} = \begin{cases} -1+(-1)=-2 & \text{se } m \text{ dispari} \\ 1+1=2 & \text{se } m \text{ pari} \end{cases}$$

$n=2m+1$ è dispari, $$i^{2m+1}-i^{2m+1} = (\pm i)-(\pm i) = 0$$

Quindi $$\sum_{n\geq 0} \frac{i^n+(-1)^n i^n}{n!} z^n = 2\sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

e otteniamo che $$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} = \cos(z).$$

Per il sen(z), la soluzione è analoga.

1 ii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad e \quad \sin(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

sono serie convergenti in $\mathbb{C}$.

Quindi, d'accordo con il Teorema 3.2, siccome

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \ \forall z \in \mathbb{R}$, essendo $\mathbb{R}$ un'insieme infinito di punti contenendo 0 come punto di accumulazione, otteniamo che l'identità

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ deve valere sempre, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Infatti, 1 è l'unica serie di potenze che può estendere $\cos^2 z + \sin^2 z$ su tutto $\mathbb{C}$.

1 iii) $\sin' z = \cos z$

Basta usare la formula della differenziazione di serie di potenze:

$$\sin z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \sin' z = \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n+1)\, z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

1 iv) si fa in modo analogo.

2i) $\cos z = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es. 1i)}}}{\iff} e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} = 0$

$\iff e^{-y+ix} + e^{y-ix} = 0 \iff e^{-y} e^{ix} + e^{y} \cdot e^{-ix} = 0$

$\iff e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \sin x) = 0$

$\iff \begin{cases} \cos x(\overbrace{e^{-y} + e^{y}}^{>0}) = 0 \\ \sin x(e^{-y} - e^{y}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos x = 0 \\ \end{cases} \implies \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z} \\ e^{-y} = e^{y} \end{cases}$

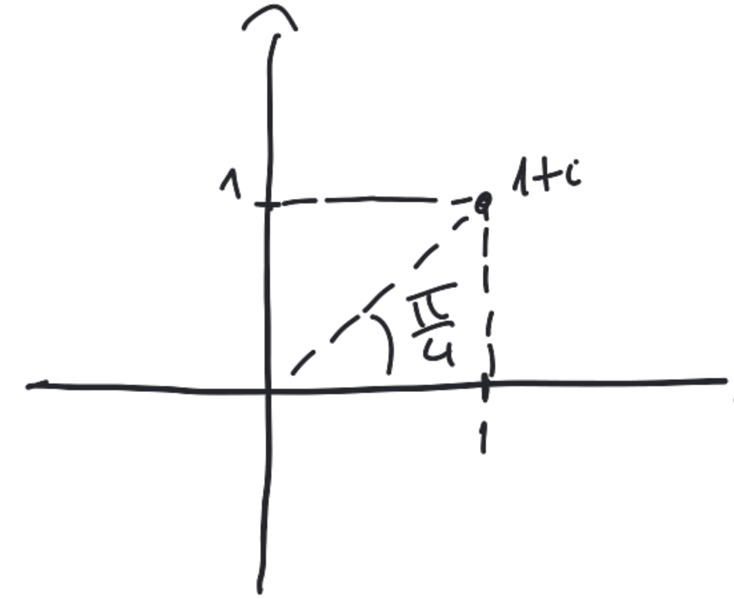
$\implies \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \therefore \cos z = 0 \iff z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$

(Oss. In particolare, non ci sono soluzioni non reali

ii) $\sin z = 0 \iff z = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ (si fa in modo analogo).

2 iii) $\log(1+i) = \log|1+i| + i \arg(1+i)$

$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$



iv) $\log(-\pi) =$

$= \log|-\pi| + i \arg(-\pi) = \log\pi + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

v) $\log(e) = \log e + i \arg(e) = 1 + i\, 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

vi) $i^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\log i) = \exp\left(\sqrt{2}\left(\cancelto{0}{\log 1} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

$= \exp\left(i\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}k\pi\right)\right) =$

$\cos\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}k\pi\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

vii) $(1-i)^{\sqrt{3}^{i}}$

$$\sqrt{3}^{i} = \exp(i \log \sqrt{3}) = \cos(\log\sqrt{3}) + i \sin(\log\sqrt{3})$$

$$\log(1-i) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(1-i)^{\sqrt{3}^{i}} = \exp\left[\left(\cos(\log\sqrt{3}) + i \sin(\log\sqrt{3})\right)\left(\log\sqrt{2} + i\,\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

$k \in \mathbb{Z}$

scusati, non era tanto bello questo!

Invece confermati che $i^{i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ oppure $g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$f(0) = 1$ e $g(0) = 0$

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n\, z^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$f''(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n}}{(2n)!} = f(z)$$

$$g'(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)\, z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$g''(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = g(z)$$

→ Come sono fatte tutte le funzioni analitiche t.c.
$g''(z) = g(z)$ e $g(0) = 0$?

(3 - continuazione)

Usando le vostre conoscenze di equazioni differenziali reali si dimostra che tale g, se con variabile reale, dovrebbe essere data da

$$g(x) = a e^{x} - a e^{-x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Lo sviluppo di questa funzione è quindi

$$\sum_{n\geq 0} a \frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} a(-1)^n \frac{x^n}{n!} = a \sum_{n\geq 0} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^n$$

$$= a \sum_{n\geq 0} 2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2a \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando il teorema 3.2, si ottiene che una funzione analitica complessa in 0 che soddisfa le condizione date, i.e., $f(0)=0$ e $f''(z)=f(z)$, è tale che

$$f(z) = K \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad K \in \mathbb{C}.$$

4 i) $f(z) = (2i+z)^{-3}$, $z=0$

Infatti, $\left(\frac{1}{2i+z}\right)'' = 2f(z)$, quindi possiamo procedere a partire dallo sviluppo di $\frac{1}{2i+z}$.

Ha $$\frac{1}{2i+z} = \frac{1}{2i-(-z)} = \frac{1}{2i\left(1-\left(\frac{-z}{2i}\right)\right)} = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} z^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} z^{n+1}$$

Utilizzando la formula per differenziazione di serie di potenze otteniamo che

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i+z}\right)''}_{f''(z)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n(n-1)}{(2i)^{n+1}} z^{n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{(2i)^{n+3}} z^n.$$

4iii) $h(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, in $z=0$

Osserviamo che, usando decomposizione della frazione in frazioni semplici,

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-(-z)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

Otteniamo quindi

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

5 i) Se $f(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$, $|z-1| < 1$, allora

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n} (z-1)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} (z-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (z-1)^n = \frac{1}{1-(-(z-1))} = \frac{1}{z}$$

ii) Si fa in modo analogo.