Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 5

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Determinare se le seguenti funzioni sono isomorfismi analitici locali nei punti indicati.*

(i) e^z, $z = 0$;

(ii) $\frac{z-1}{z-2}$, $z = 1$;

(iii) $\cos z$, $z = \pi$ *e* $z = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2. *Siano* $f(z) = \sin(z^2)$ *e* $g(z) = (\sin z)^2$. *Determinare se* f *e/o* g *sono isomorfismi analitici locali in* $z = 0$ *e, in caso positivo, trovare lo sviluppo per l'inversa.*

Esercizio 3. *Si dimostri che* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n, n \geq 2$ *è un'isomorfismo analitico locale in* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *ma* $f_{|\mathbb{C}^*}$ *non è un'isomorfismo analitico.*

Esercizio 4. *Sia* $U \subset \mathbb{C}$ *un'aperto connesso limitato e sia* $\{f_n\}$ *una sequenza di funzioni continue nella chiusura di* U, *analitiche in* U, *e uniformemente convergenti nel bordo di* U. *Si dimostri che* $\{f_n\}$ *converge uniformemente in* U.

Esercizio 5. *Siano* $a_1, \ldots, a_n$ *punti di* $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. *Si dimostri che esiste un punto* z *in* B *tale che il prodotto delle distanze da* z *agli* a_j *è almeno uguale a* 1.

Esercizio 6. *Dimostrare che la funzione reale di variabile reale* $f(x) := \sqrt{x}$ *non ammette alcun prolungamento analitico a* $\mathbb{C}$.

Esercizio 7. *Siano* $[a, b], [c, d] \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq b$, $c \neq d$. *Mostrare che esiste* $g(t) = rt + s$ *strettamente crescente tale che* $g(a) = c$, $g(b) = d$.
Corollario*: una curva può essere parametrizzata da ogni intervallo fissato.*

Esercizio 8. *Disegnare le seguenti curve*

(i) $\gamma_1(t) = 1 + it$, $t \in [0, 1]$;

(ii) $\gamma_2(t) = e^{-i\pi t}$, $t \in [0, 1]$;

(iii) $\gamma_3(t) = i + e^{i\pi t}$, $t \in [0, 1]$;

(iv) $\gamma_4(t) = 1 + it + t^2$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 9. *Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni su ciascuna curva dell'esercizio precendente*

(i) $f(z) = z^3$;

(ii) $f(z) = \bar{z}$;

(iii) $f(z) = 1/z$.

Esercizio 10. *Calcolare* $\int_\gamma ze^{z^2} dz$

(i) *lungo un segmento che congiunge il punto* i *al punto* $-i+2$*;*

(ii) *lungo la curva che va dal punto* i *al punto* $1+i$ *lungo la parabola* $y = x^2$.

Esercizio 11. *Sia* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, e sia* $\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$. *Mostrare che* $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

Esercizio 12. *Sia* $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continua, mostrare che* $\left|\int_a^b F(z)dz\right| \leq \int_a^b |F(z)|dz$. Suggerimento*: usare la definizione di integrale come limite di somme di Riemann.*

Esercizio 13. *Calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma$ *sinz* dz*, dove* γ *è la parte della parabola di equazione* $y = x^2$ *dall'origine fino al punto* $1+i$.

Esercizio 14. *Sia* $x \in \mathbb{R}_{>0}$. *Calcolare* $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \left(\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix} \right) dt.$