Esercitazione 5

1 i) e^z è un'isomorfismo analitico locale in $z=0$

perché $(e^z)' = e^z$ e $e^0 = 1 \neq 0$

ii) $\left(\frac{z-1}{z-2}\right)' = \frac{z-2-(z-1)}{(z-2)^2} = \frac{-1}{(z-2)^2}$ che, in $z=1$ è $\frac{-1}{(-1)^2} = -1 \neq 0$

quindi sì, è un'isomorfismo locale in $z=0$.

iii) $(\cos z)' = -\sin z$ quindi $(\cos z)'\big|_{z=\pi} = -\sin\pi = 0$

e $(\cos z)'\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \neq 0$

Quindi $\cos z$ è un'isomorfismo analitico locale in $z=\frac{\pi}{2}$

ma no in $z=\pi$.

$\boxed{2}$ $f(z) = \sin(z^2)$, $g(z) = (\sin z)^2$.

$f'(z) = 2z\cos(z^2)$, $g'(z) = 2\sin z \cos z = \sin(2z)$

$f'(0) = 0$ e $g'(0) = 0$

Quindi né f né g sono isomorfismi locali in $z=0$.

Infatti, si vede bene che né f né g sono iniettive in $z=0$.

$\boxed{3}$ $f(z) = z^n$, $n \geq 2$. E' un'isomorfismo analitico locale se $z \neq 0$ perché $f'(z) = n z^{n-1} \Rightarrow f'(z) \neq 0, \forall z \neq 0$.

Invece il fatto che $f|_{\mathbb{C}^*}$ non sia un'isomorfismo analitico segue dal fatto che f non è iniettiva.

2 (cont.) Infatti, se scriviamo $z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ in forma polare, abbiamo che $z_0^n = (R_0 e^{i\theta_0})^n = R_0^n e^{in\theta_0}$

Quindi se $w^n = (R_1 e^{i\theta_1})^n = R_1^n e^{in\theta_1}$, otteniamo che
$\overset{\frown}{w = R_1 e^{i\theta_1}}$

$$z^n = w^n \iff R_0^n e^{i\theta_0 n} = R_1^n e^{in\theta_1}$$

e $e^{i\theta_0 n} = e^{in\theta_1} \iff in\theta_1 = in\theta_0 + i2k\pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_0 + \frac{2k\pi}{n}, \; k \in \mathbb{Z}$$

<u>Ossia</u>, dati $z = R_0 e^{i\theta}$, con $\theta = \theta_0 + \frac{2\pi i k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo che $z^n = z_0^n$.

Quindi z^n non è iniettiva

4 Sia $\{f_n\}$ succ. di funzioni continue in $\overline{U}$, con U aperto connesso, e t.c. $\{f_n\}$ e' unif. conv. in ∂U.

Allora $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : \forall n, m \geq N$,

$$\| f_n - f_m \|_{\partial U} = \sup_{z \in \partial U} | f_n(z) - f_m(z) | < \varepsilon .$$

Ma le funzioni $f_n - f_m$ sono continue in $\overline{U}$, che e' chiuso e limitato quindi compatto. Otteniamo quindi che $|f_n - f_m|$ ha un massimo in $\overline{U}$ che, per il principio del massimo modulo, (che si può applicare perchè f_n è analitica in U) e' raggiunto in un punto del bordo di U. Conseguentemente,

$$\| f_n - f_m \|_{\overline{U}} = \sup_{z \in \overline{U}} | f_n(z) - f_m(z) | = \sup_{z \in \partial U} | f_n(z) - f_m(z) |$$

e quindi $\{f_n\}$ e' di Cauchy in $\overline{U}$ $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ conv. unif. in $\overline{U}$.

5. $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $a_1, \dots, a_n \in B$.

$\Rightarrow$ $\exists\ z \in B : |z - a_1| \dots |z - a_n| \geq 1$.

Consideriamo $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \prod_{k=1}^{n} (z - a_k) = (z - a_1) \dots (z - a_n).$$

Allora f è analitica in $D(0,1)$ e continua in $\overline{D(0,1)}$.

Quindi, essendo $\overline{D(0,1)}$ compatto, f raggiunge un massimo nel bordo di $D(0,1)$, che è B, perché f è analitica in $D(0,1)$.

Ma essendo $|f(0)| = |a_1| \dots |a_n| = 1 \dots 1 = 1$,

otteniamo che $|f(z_0)| = |z_0 - a_1| \cdot \dots \cdot |z_0 - a_n| \geq |f(0)| = 1$.

se $z_0 \in B$ è il massimo di $|f|$ in $\partial\overline{D(0,1)} = B$

6. Sia $f(x)=\sqrt{x}$ e supp per assurdo che esiste un prolungamento analitico di f a $\mathbb{C}$: $f(z)=\sqrt{z}$. Allora f deve essere t.c. $\forall z \in \mathbb{C}$, $(\sqrt{z})^2 = z$.

Quindi se $f(z) = Re^{i\theta}$, $f(z) = \sqrt{R}\, e^{i\theta_0}$, con

$$2\theta_0 = \theta + 2K\pi, \; K \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\theta}{2} + K\pi, \; K \in \mathbb{Z}.$$

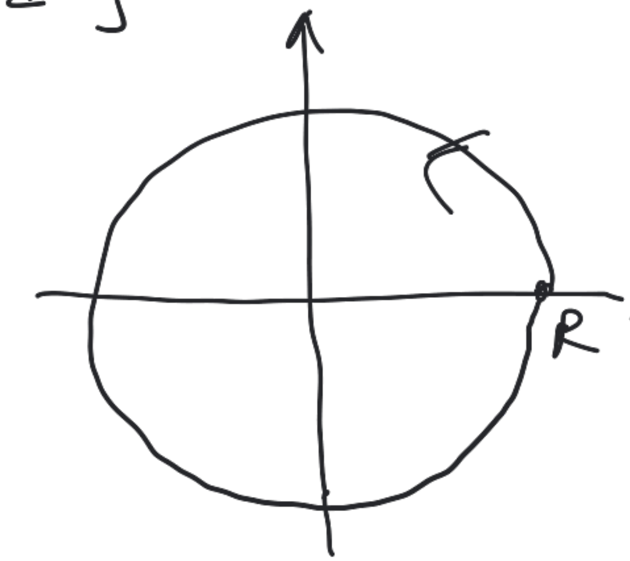
Se esistesse un prolungamento analitico di f a $\mathbb{C}$, questo prolungamento dovrebbe essere una funzione continua, in particolare percorrendo una circonferenza $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Consideriamo $z = Re^{i\theta} = R$ e supp. che $\sqrt{z} = \sqrt{R}\, e^{i\theta_0}$, con $\theta_0 = K_0\pi$, per un qualche $K_0 \in \mathbb{Z}$.

Allora facendo variare z in C_R, otteniamo $\longrightarrow$

6 (cont.)

$$\sqrt{z}\,\Big|_{C_R} = \left\{ \sqrt{R}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2} + k_0\pi\right)} : 0 < \theta < 2\pi,\ k_0 \in \mathbb{Z} \right\}$$



Ma allora per continuità dovremo avere che

$$\underbrace{\sqrt{R}\, e^{i k_0 \pi}}_{\sqrt{R e^{i0}}} = \underbrace{\sqrt{R}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{2} + k_0\pi\right)}}_{\sqrt{R e^{i(0+2\pi)}}}$$

Ma allora $e^{i k_0 \pi} = e^{i(\pi + k_0\pi)}$

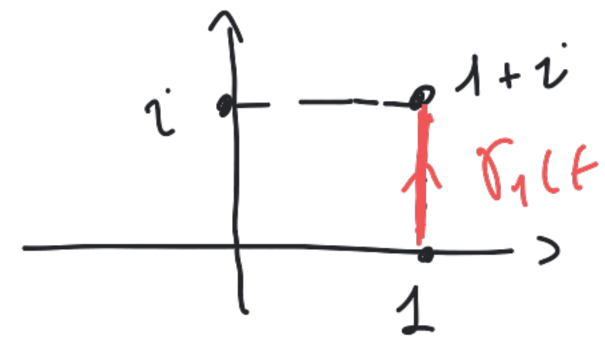
$$\Rightarrow k_0\pi = \pi + k_0\pi + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (2k+1)\pi = 0 \Rightarrow 2k+1 \text{ è pari } \lightning.$$

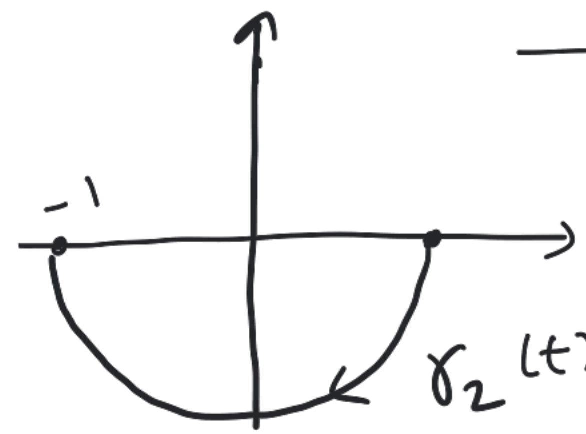
Quindi non è possibile estendere $\sqrt{z}$ a nessuna regione che contenga un cerchio C_R, e in particolare non a $\mathbb{C}$!

7. Vedere Lemma 2.1.1. sugli appunti del Prof. Sernesi.

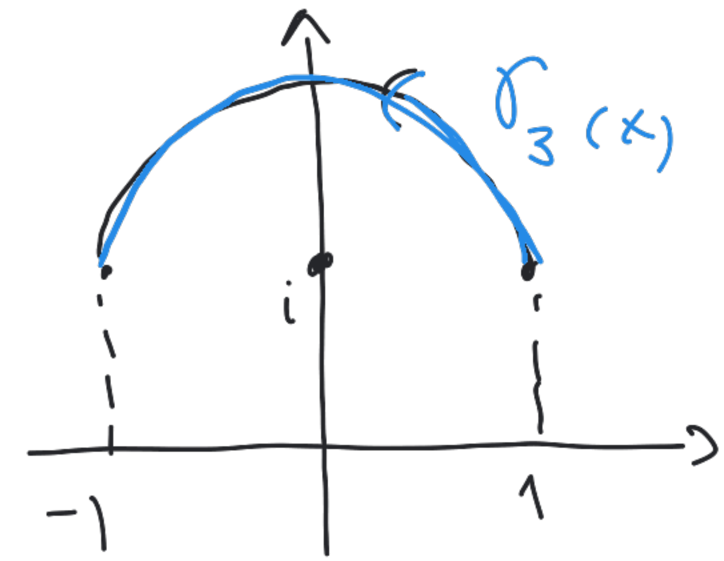
8. i) $\gamma_1(t) = 1 + it$, $t \in [0,1]$



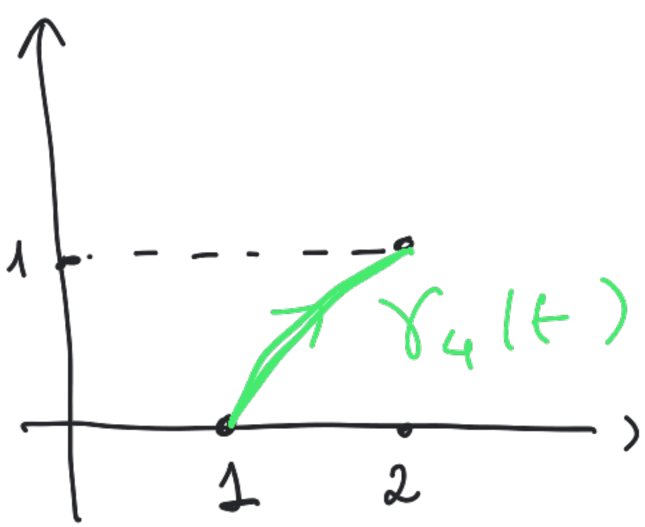
ii) $\gamma_2(t) = e^{-i\pi t}$, $t \in [0,1]$



iii) $\gamma_3(t) = i + e^{i\pi t}$, $t \in [0,1]$



iv) $\gamma_4(t) = 1 + it + t^2$, $t \in [0,1]$



$\underline{9}$ i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} z^3\, dz \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 (1+it)^3 \cdot i\, dt = i \int_0^1 (1+3it-3t^2-it^3)\, dt$

$\gamma_1(t) = 1+it,\ t \in [0,1]$

$$= i \left[t + \frac{3it^2}{2} - t^3 - \frac{it^4}{4} \right]_{t=0}^{t=1} = i \left(\cancel{1} + \frac{3i}{2} - \cancel{1} - \frac{i}{4} \right) =$$

$$= i \left(\frac{5i}{4} \right) = -\frac{5}{4}$$

ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} z^3\, dz \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \left(e^{-i\pi t}\right)^3 \cdot (-i\pi)\, e^{-i\pi t}\, dt =$

$\gamma_2(t) = e^{-i\pi t},\ t \in [0,1]$

$$= -i\pi \int_0^1 \left(e^{-i\pi t}\right)^4 dt = -i\pi \int_0^1 e^{-i4\pi t}\, dt =$$

$$= -i\pi \left[\frac{e^{-i4\pi t}}{-i4\pi} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4} \left(e^{-i4\pi} - e^0 \right) = 0.$$

Un'altro modo per risolvere gli esercizi precedenti sarebbe stato usare il fatto che $\frac{z^4}{4}$ e' una primitiva di z^3:

Per esempio, per γ_3 possiamo scrivere

$$\int_{\gamma_3} z^3 \, dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_{z=1+i}^{z=-1+i} = \frac{(-1+i)^4}{4} - \frac{(1+i)^4}{4} = -1-(-1) = 0.$$

γ_3 va da $1+i$ a $-1+i$

⇝ Come esercizio controllate anche i conti precedenti così.

9 (cont) $\displaystyle\int_{\gamma_4} z^3\,dt = \dots = \frac{(2+i)^4}{4} - \frac{1}{4}$

ii) $f(z) = \bar{z}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz \underset{\gamma_1(t)=1+it,\ t\in[0,1]}{=} \int_0^1 \overline{(1+it)}\cdot i\,dt = i\int_0^1 (1-it)\,dt =$

$$= i\left[t - \frac{it^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = i\left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz \underset{\gamma_2(t)=e^{-i\pi t},\ t\in[0,1]}{=} \int_0^1 \left(\overline{e^{-i\pi t}}\right)\cdot(-i\pi)\,e^{-i\pi t}\,dt = -i\pi\int_0^1 e^{i\pi t}\cdot e^{-i\pi t}\,dt$$

$$= -i\pi\int_0^1 1\,dt = -i\pi$$

$$\int_{\gamma_3} \bar{z}\, dt = \int_0^1 \overline{\left(i + e^{i\pi t}\right)} \cdot i\pi e^{i\pi t}\, dt =$$

$$\gamma_3(t) = i + e^{i\pi t},\ t \in [0,1]$$

$$= i\pi \int_0^1 \left(-i + e^{-i\pi t}\right) e^{i\pi t}\, dt = i\pi \int_0^1 -i e^{i\pi t} + e^0\, dt =$$

$$= i\pi \left[-\frac{e^{i\pi t}}{\pi} + t \right]_0^1 = i\pi \left[\frac{1}{\pi} + 1 \right] = (\pi + 1)\, i$$

$$\int_{\gamma_4} \bar{z}\, dt = \dots = 2 + \frac{2i}{3}$$

9 (ii) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma_1(t) = 1+it,\ t\in[0,1]}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+it} \cdot i\, dt = \log\left[1+it\right]_{t=0}^{t=1} =$

$$= \log(1+i) - \log 1 = \log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dt = \dots = -i\pi$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\, dt \underset{\nearrow}{=} \Big[\log z\Big]_{z=1+i}^{z=-1+i} = \log(-1+i) - \log(1+i)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} - \left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= i\frac{\pi}{2}$$

$\gamma_3(t) = i + e^{i\pi t},\ t\in[0,1]$

va da $1+0$ a $-1+i$

$$\int_{\gamma_4} \frac{1}{z}\, dt = \dots = \log\sqrt{5} + i\,\mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

10 $$\int_\gamma z e^{z^2}\, dz \underset{\uparrow}{=} \left[\frac{e^{z^2}}{2}\right]_{z=i}^{z=-i+2} = \frac{e^{(-i+2)^2}}{2} - \frac{e^{i^2}}{2} =$$

γ segmento da i a $-i+2$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{3-4i} - e^{-1}\right)$$

$$\int_\gamma z e^{z^2}\, dz \underset{\uparrow}{=} \left[\frac{e^{z^2}}{2}\right]_{z=0}^{z=1+i} = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)^2} - 1\right) =$$

γ parabola da 0 a $1+i$ $\quad = \frac{1}{2}\left(e^{2i} - 1\right)$

11 $$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz \underset{\uparrow}{=} \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-1)\, \gamma'(a+b-t)\, dt =$$

$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t),\ t \in [a,b]$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_b^a f(\gamma(u))\, \gamma'(u)\, du = -\int_a^b f(\gamma(u))\, \gamma'(u)\, du = -\int_\gamma f(z)\, dz.$$

$u = a+b-t$
$du = -dt$

12 Vedere Appunti prof. Sernesi, Lemma 2.2.1 (i).

13 $$\int_\gamma \sin z \, dz \underset{\uparrow}{=} \left[-\cos z\right]_0^{1+i} = -\left(\cos(1+i) - 1\right).$$

γ da 0 a $1+i$

14 Dato $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \left(\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix} \right) dt = \otimes$$

$$\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix} = \frac{-2ix}{t^2+x^2} = -\frac{2i}{x} \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}$$

$$\otimes = \lim_{A\to\infty} -2i \left[\operatorname{arctg} \frac{t}{x}\right]_{t=-A}^{t=A} = \lim_{A\to\infty} -4i \, \overbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{A}{x}\right)}^{\nearrow \frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\pi i.$$