Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 6
Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Sia* $\gamma_m(t) := c + Re^{2\pi i t m}$, $t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z}$, $R > 0$, $c \in \mathbb{C}$. *Calcolare*

$$I_{p,m} := \int_{\gamma_m} \frac{1}{(z-c)^p} dz, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Esercizio 2. *Sia* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *mostrare che* $exp\left(\int_\alpha \frac{dz}{z}\right) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)}$.
Corollario*: Se* $\alpha(a) = \alpha(b)$, *allora esiste* $m \in \mathbb{Z}$ *tale che* $\int_\alpha \frac{dz}{z} = 2\pi i m$.

Esercizio 3. *Sia* $\mathbb{H}$ *il cosi-detto semi-piano superiore:* $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$.

(i) Giustificare che $\mathbb{H}$ *è semplicemente connesso*

(ii) Consideriamo $f(z) = e^{2\pi i z}$. *Determinare l'immagine* $f(\mathbb{H})$ *e verificare se è o meno semplicemente connessa.*

Esercizio 4. *Considera i numeri complessi* $z_1 = i, z_2 = -1 + i, z_3 = i^i, z_4 = (-1)^{-i}$. *Determinare, se possibile, il valore di* $\log(z_i)$, *dove l'argomento* θ *di* z_i *è considerato negli intervalli:*

(i) $0 < \theta < 2\pi$;

(ii) $-\pi < \theta < \pi$.

Esercizio 5. *Le funzioni complesse* $\sin z$ *e* $\cos z$ *sono intere. Giustificare che le loro immagine sono illimitate in* $\mathbb{C}$ *senza utilizzare il Teorema di Liouville.*

Esercizio 6. *Si determini*

$$\lim_{y \to 0} [\log(a + iy) - \log(a - iy)],$$

con $a < 0$ *oppure* $a > 0$, *e dove*

(i) il logaritmo è definito nell'aperto $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ *e* $y > 0$.

(ii) il logaritmo è definito nell'aperto $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esercizio 7. *Sia* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *la circonferenza unitaria percorsa in senso alti-orario. Calcolare*

(i) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz$;

(ii) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz$;

(iii) $\int_\gamma \frac{\cos^2 z}{z} dz$;

(iv) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n} dz$;

(v) $\int_\gamma \frac{p(z)}{z^n} dz$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Esercizio 8. *Calcolare i seguenti integrali (dove con $\oint_\gamma$ intendiamo l'integrale lungo la curva chiusa γ percorsa in senso anti-orario):*

(i) $\oint_B \frac{\sinh(z)}{z(z-1/2)} \, dz$, *dove*

$$B = \{x + iy : |x| \leq 1, |y| = 1\} \cup \{x + iy : |y| \leq 1, |x| = 1\};$$

(ii) $\oint_C \frac{e^{\sin(z)}}{(z-1)(z-3i)} \, dz$, *dove*

$$C = \{x + iy : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\};$$

(iii) $\oint_D \frac{\log(z)}{(z-i)^2} \, dz$, *dove*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = r\}, \quad 0 < r < 1,$$

e $log(z) := \log(|z|) + iarg(z)$, $arg(z) \in [0, 2\pi[$, *e* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.