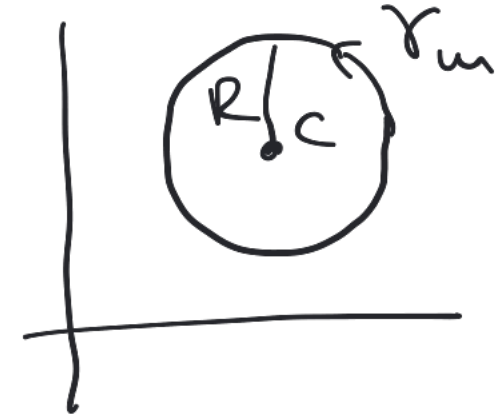
Esercitazione 6

(1) $\gamma_m(t) = c + R e^{2\pi i m t}$, $t \in [0,1]$



è la circonferenza di centro $c \in \mathbb{C}$ e raggio $R>0$ percorsa m volte nel senso antiorario. Per $p \in \mathbb{Z}$,

$$I_{p,m} = \int_{\gamma_m} \frac{1}{(z-c)^p}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{(R e^{2\pi i m t})^p}\, 2\pi i m R e^{2\pi i m t}\, dt$$

$$= \int_0^1 2\pi i m \left(R e^{2\pi i m t}\right)^{1-p} dt = \int_0^1 2\pi i m\, R^{1-p} e^{(1-p)(2\pi i m t)}\, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 1-p \neq 0 \\ 2\pi i m & \text{se } 1-p = 0 \iff p = 1. \end{cases}$$

2. Supponiamo che $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è tale che $\alpha([a,b]) \subset U$, dove U è un aperto semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Allora, dato $w_a \in \mathbb{C}$ t.c. $e^{w_a} = \alpha(a)$, sappiamo che

$$L(z) = w_a + \int_{\alpha(a)}^{z} \frac{1}{\xi}\, dz$$

è una inversa per l'esponenziale, ossia che

$$\exp(L(z)) = z$$

dove con $\int_{\alpha(a)}^{z}$ intendiamo qualunque cammino tra $\alpha(a)$ e z contenuto in U.

Quindi $\exp\left(L(z) - w_a\right) = \dfrac{\exp(L(z))}{\exp(w_a)} = \dfrac{z}{\alpha(a)}$

Facendo $z = \alpha(b)$ concludiamo che

$$\exp\left(L(\alpha(b)) - w_a\right) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)}$$

$$\Pi_a \quad L(\alpha(b)) - w_a = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \frac{1}{\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{\alpha} \frac{1}{z}\, dz .$$

Se invece $\alpha([a,b])$ non fosse contenuta in un semplicemente connesso $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ possiamo trovare una partizione di $[a,b]$: $\{ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \}$ tali che ogni sottointervallo $[a_i, a_{i+1}]$ è contenuto in un disco aperto contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e concludere nel modo seguente:

$$\exp\left(\int_\alpha \frac{1}{z}\, dz \right) = \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i} \frac{1}{z}\, dz \right)$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \exp\left(\int_{\alpha_i} \frac{1}{z} \right) dz = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha(a_{i+1})}{\alpha(a_i)} =$$

$$= \frac{\alpha(a_1)}{\alpha(a_0)} \frac{\alpha(a_2)}{\alpha(a_1)} \cdot \frac{\alpha(a_3)}{\alpha(a_2)} \cdots \frac{\alpha(a_n)}{\alpha(a_{n-1})} = \frac{\alpha(a_n)}{\alpha(a_0)} = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)},$$

dove $\alpha_i = \alpha([a_i, a_{i+1}])$.

Infatti da qui si conclude nel caso di una curva chiusa che $\exp\left(\int_\alpha \frac{dz}{z}\right) = 1 \Rightarrow \int_\alpha \frac{dz}{z} = 2\pi i m, \exists m \in \mathbb{Z}$

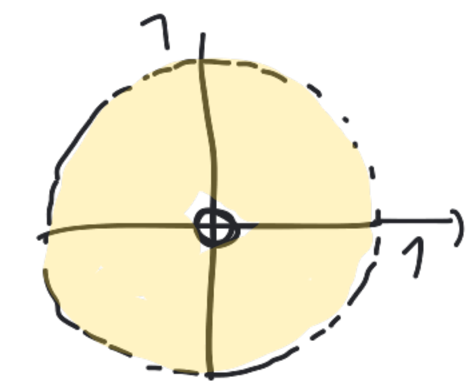
3) - i) $\mathbb{H}$ è semplicemente connesso perché è un convesso di $\mathbb{C}$.

ii) $f(\mathbb{H}) = \{ e^{2\pi i z} : z \in \mathbb{H} \}$.

$$e^{2\pi i (x+iy)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{-2\pi y}, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

Quindi, dato $z \in f(\mathbb{H})$, $\arg z \in \mathbb{R}$

e $|z| = |e^{-2\pi y}| \underset{y>0}{\in}]0,1[$.



$\therefore f(\mathbb{H}) = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \}$

4) $z_3 = i^i = e^{i \log i} =$

$\Rightarrow \log(z_3) = \log\left(e^{i \log i}\right) = i \log i$

$= i\,(\overset{0}{\cancel{\log|i|}} + i \arg(i)) = -\arg(i)$

i) $0 < \theta < 2\pi \quad \therefore \quad \log(z_3) = -\frac{\pi}{2}$

(ii) $-\pi < \theta < \pi \quad \therefore \quad \log(z_3) = -\frac{\pi}{2}.$

5. Basta osservare che, ad esempio, se prendiamo $z = iy$, allora

$$|\cos iy| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \geq \frac{e^{y}}{2} \Rightarrow \lim_{y \to \infty} |\cos iy| = \infty$$

$$\uparrow$$

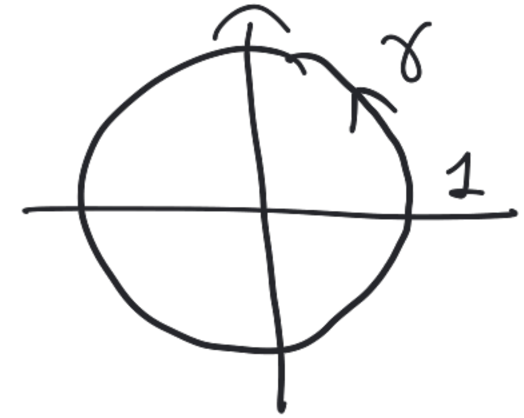
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \Rightarrow \cos z \text{ è illimitata.}$$

Analogo per $\operatorname{sen} z$.

7. i) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$

Formula Cauchy

($f(z) = \cos z$ è olomorfa)

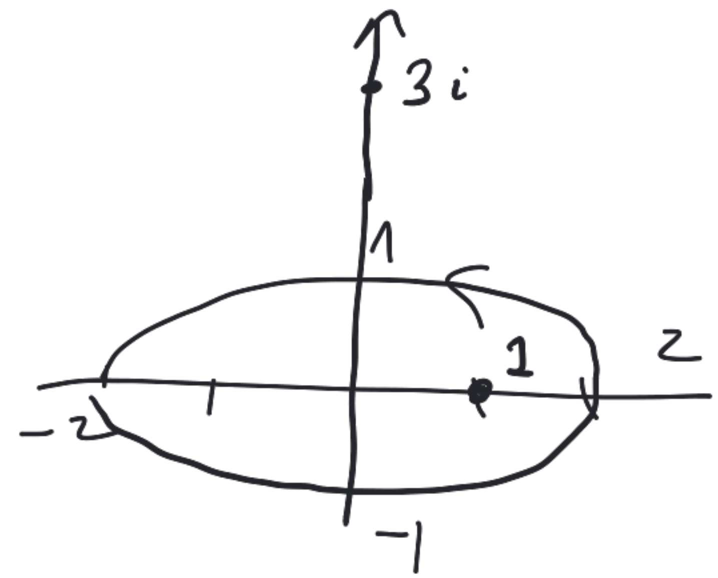


iv) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \cos^{(n-1)}(0)$, con

Formula Cauchy per le derivate

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 0 \bmod 4 \\ 0 & \text{se } n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{se } n \equiv 2 \bmod 4 \\ 0 & \text{se } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

8 ii) $f(z) = \dfrac{e^{\sin z}}{z-3i}$ è olomorfa in int(C)



quindi, per formula di Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\frac{e^{\sin z}}{z-3i}}{z-1}\, dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i \frac{e^{\sin 1}}{1-3i}$$