Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 7

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Sia U un'aperto semplicemente connesso e siano $z_1, \ldots, z_n$ punti di U. Sia $U^* = U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ l'insieme ottenuto da U cancelando i punti $z_1, \ldots, z_n$ e sia f una funzione analitica in U^*. Si definisca, per $k = 1, \ldots, n$,*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(\xi) d\xi,$$

dove γ_k è un piccolo cerchio centrato in z_k. Sia $h(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k}$. Si dimostri che esiste una funzione analitica H in U^* tale che $H' = h$.

Esercizio 2. *Sia f una funzione analitica in un aperto U e sia $z_0 \in U$ tale che $f'(z_0) \neq 0$. Mostrare che*

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_C \frac{1}{f(z) - f(z_0)},$$

dove C è un piccolo cerchio di centro z_0 orientato positivamente.

Esercizio 3. *Sia $a > 0$. Mostrare che ciascuna delle serie seguenti rappresenta una funzione olomorfa:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$, *per $Re(z) > 0$;*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-anz}}{(a+n^2)}$, *per $Re(z) > 0$.*

Esercizio 4. *Si considerino le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1 - z^n} \ e \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1 - z^n)^2}.$$

Mostrare che

(i) entrambe le serie convergono nel disco chiuso $|z| \leq c$, con $0 < c < 1$;

(ii) le due serie infatti coincidono (Sug. scrivere ogni serie come una serie doppia e scambiare l'ordine della somma).

Esercizio 5 (Serie di Dirichlet)**.** *Sia $\{a_n\}$ una sucessione di numeri complessi. Mostrare che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge assolutamente per un certo complesso s, allora converge assolutamente in un semi-piano destro $Re(s) > \sigma_0$, e uniformemente in $Re(s) > \sigma_0 + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Mostrare che la serie quindi definisce una funzione analitica in questo semi-piano. (Il numero σ_0 è detto ascissa di convergenza.)*

Esercizio 6. *(i) Sia f un'isomorfismo analitico nel disco unitario D, e sia $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ il suo sviluppo in serie di potenze. Mostrare che area$(f(D)) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$.*

(ii) Supponiamo che f è un'isomorfismo analitico nella chiusura di un disco $\overline{D}$, e che $|f(z)| \geq 1$ se $|z| = 1$, e che $f(0) = 0$. Mostrare che area$(f(D)) \geq \pi$.

Esercizio 7. *Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo di una serie di Laurent di una funzione f in una corona circolare A. Mostrare che la derivata di f in A si può ottenere differenziando la serie termine a termine.*

Esercizio 8. *Sia $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$.*

(i) Trovare e classificare le singolarità di f.

(ii) Scrivere la serie di Laurent di f in $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}$.

Esercizio 9. *Sia $f(z) = ze^{1/z}$. Trovarne le singolarità, scriverne la serie di Laurent e calcolare $I_m = \int_\gamma z^m f(z)\, dz$, dove $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $m \in \mathbb{Z}$.*

Esercizio 10. *Sia $f(z) = \frac{ze^{2\pi z^2}}{e^{2\pi z^2} - 1}$. Trovarne le singolarità, disegnarle nel piano complesso e scrivere la parte principale di f nelle singolarità.*

Esercizio 11. *Mostrare che se serie seguenti definiscono funzioni meromorfe in $\mathbb{C}$ e determinare e classificare le sue singolarità:*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n!(z^2+n^2)}$;

(v) $\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$;

Esercizio 12. *Sia $\{z_n\}$ una sucessione di numeri complessi tali che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^3}$ converge. Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-z_n)^2} - \frac{1}{z_n^2} \right)$ definisce una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ e classificare i suoi poli.*

Esercizio 13. *Sia f una funzione meromorfe in $\mathbb{C}$ e non intera. Sia $g(z) = e^{f(z)}$. Mostrare che g non è meromorfa in $\mathbb{C}$.*