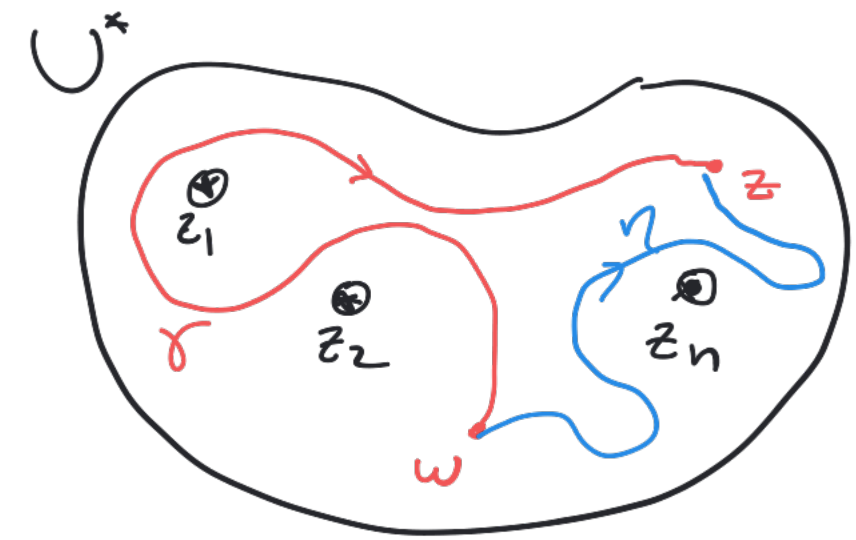
Esercitazione 7



(1) Sia $w \in U^*$ e definiamo, per ogni $z \in U^*$,

$$H_\gamma(z) = \int_\gamma h(\xi)\, d\xi ,$$

dove γ è un cammino da w a z in U^*. Vediamo che $H_\gamma(z) = H_\eta(z)$, se η è un'altro cammino da w a z. Essendo U semplicemente connesso, e $\mu := \gamma - \eta$, μ è un cammino chiuso in U e quindi omologo a zero in U, e

$$H_\gamma(z) - H_\eta(z) = \int_\mu \underbrace{h(\xi)}\, d\xi .$$

Quindi dobbiamo mostrare che

$$\int_\mu \left[f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\xi - z_k} \right] d\xi = 0.$$

Scriviamo, usando T. Cauchy,

$$\int_\mu h(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{n} w(\mu, z_k) \int_{\gamma_k} h(\xi)\,d\xi$$

Ma

$$\int_{\gamma_k} h(\xi)\,d\xi = \int_{\gamma_k} f(\xi)\,d\xi - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(\xi)\,d\xi}_{= a_k} \underbrace{\int_{\gamma_k} \frac{1}{\xi - z_k}\,d\xi}_{=2\pi i} = 0$$

Quindi esiste la funzione H definita sopra perché l'integrale non dipende dalla scelta di cammino.

Si conclude adesso in modo standard che $H' = h$ e si conclude la prova.

2\. Se f e' analitica in z_0, per valori di z vicini a z_0, abbiamo

$$f(z) = \underbrace{a_0}_{= f(z_0)} + \underbrace{a_1}_{= f'(z_0) \neq 0} (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow f(z) - f(z_0) = a_1 (z-z_0) \underbrace{\Big(\overbrace{1 + \frac{a_2}{a_1}(z-z_0) + \cdots}^{= h(z)} \Big)}_{\text{loc. invertibile}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overbrace{\frac{z-z_0}{f(z)-z_0}}^{= g(z)}}_{}$$ e' analitica in un intorno di z_0:

$$= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{h(z)}, \quad g(z_0) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{\underbrace{h(z_0)}_{=1}} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\underset{\text{F. Cauchy}}{\Rightarrow} \int_C \frac{\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}}{z-z_0} \, dz = 2\pi i \; g(z_0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{f'(z_0)}. \quad \blacksquare$$

3 i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$, per $Re(z)>0$.

Le funzioni $f_n(z) = e^{-an^2 z}$ sono chiaramente olomorfe in $\mathbb{C}$.

$z = x+iy$

Consideriamo $\left| e^{-an^2 z} \right| = e^{-an^2 x}$.

Per argomentare con il fatto che la serie converge unif. sui compatti di $Re(z)>0$, basta mostrare che, $\forall c>0$, la serie converge uniformemente su $Re\, z \geq c$.

Ora, infatti, dato $c>0$ e $z = x+iy$ t.c. $Re\, z = x \geq c$,

$\left| e^{-an^2 z} \right| = e^{-an^2 x} \leq e^{-an^2 c} \leq e^{-anc}$, quindi

siccome $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-ac})^n$ converge per $c>0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$ conv. unif. per $Re\, z \geq c$.

Se la serie converge uniformemente per $\mathrm{Re}\, z \geq c$,

a maggior ragione converge uniformemente sui compatti

contenuti in $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Possiamo quindi applicare il Teorema 1.1 (V, §1 Lang)

per concludere che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$ converge

uniformemente per $\mathrm{Re}\, z > 0$.

b) Analogo, usando e.g. la serie numerica

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente.

4. i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n z^n}{1-z^n}}_{=: a_n(z)}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{(1-z^n)^2}}_{=: b_n(z)}$

Sia $\overline{D} = \overline{D_c(0)}$, con $0 < c < 1$.

$$|a_n(z)| = \left|\frac{n z^n}{1-z^n}\right| \leq \frac{n |z|^n}{1-|z|^n} \leq n \frac{c^n}{1-c^n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \gg 0}}{\leq} n \frac{c^n}{\frac{1}{2}} = 2nc^n.$$

Siccome $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$ converge (e.g. applicando C. Ragione)

allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{1-z^n}$ conv. uniformemente in $\overline{D}$.

$$|b_n(z)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esercizio}}}{\leq} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ n \gg 0}}{\leq} 4 c^n,$$ e siccome $\sum 4 c^n$ converge,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$ conv. unif. in $\overline{D}$.

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^k =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n (z^n)^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n (z^j)^n.$$

uguali!

invece, per la seconda serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^k \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z^n)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z^n)^{k+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j (z^n)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n (z^j)^n$$

6. Area di $f(D) = \iint_{f(D)} dx\,dy \underset{\text{Cambio di variabili}}{=}$

$= \iint_D |f'(z)|^2 dx\,dy \underset{\text{cambio di var. per coord. polari}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,|f'(re^{i\theta})|^2 \,d\theta\,dr$

Siccome $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, abbiamo

$|f'(re^{i\theta})|^2 = f'(re^{i\theta}) \cdot \overline{f'(re^{i\theta})} =$

$= (a_1 + 2a_2 r e^{i\theta} + \dots)(\overline{a_1} + 2\overline{a_2} r e^{-i\theta} + \dots)$

Ma siccome $\int_0^{2\pi} e^{ni\theta} d\theta = 0$ se $n \neq 0$, otteniamo

$$\text{area } f(D) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-2} \right) d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} \, dr \right) =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 |a_n|^2 \cdot \frac{1}{2n} \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

b) Siccome $|f(e^{i\theta})| \geq 1, \ \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \geq 2\pi$$

e usando il fatto che $f(0) = 0$, otteniamo, ragionando come in a), che $\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

Otteniamo quindi che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \geq 1$.

Ora, da a), abbiamo che

$$\text{area } f(D) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \geq \pi. \quad \blacksquare$$

7. Considerando le parti regolare e principale della serie, e usando il fatto che infatti possiamo derivare termine a termine ogni una di queste parti, si conclude che è possibile differenziare termine a termine tutta la serie.

(. . .)

8. $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$

i) Singolarità di f sono $z=0$ e $z=1$.

$\underline{z=0}$ $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z}$ $\rightsquigarrow$ olomorfa in $z=0$ e non nulla in $z=0$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-2} \rightsquigarrow \text{polo di ordine } 2$$

$0<|z|<1$

$\underline{z=1}$ $f(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{z^2}$ $\rightsquigarrow$ olomorfa in $z=0$ e non nulla in $z=1$

$$= \frac{1}{1-z} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)! (z-1)^n}$$

Se $g(z) = \frac{1}{z^2}$, $g^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! z^{-2-n}$

$g^{(n)}(1) = (-1)^n (n+1)!$

ii) Sviluppo in $\underline{A}$: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$

Sviluppo in C : $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)! (z-1)^{n-1}$

ii) Sviluppo in $B = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \}$.

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+3}$$

$\uparrow$

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \iff |z| > 1.$

10. $f(z) = \dfrac{z\, e^{2\pi z^2}}{e^{2\pi z^2} - 1}$

Singolarità: $e^{2\pi z^2} = 1 \iff e^{2\pi (x^2-y^2)} \cdot e^{i(4\pi xy)} = 1$

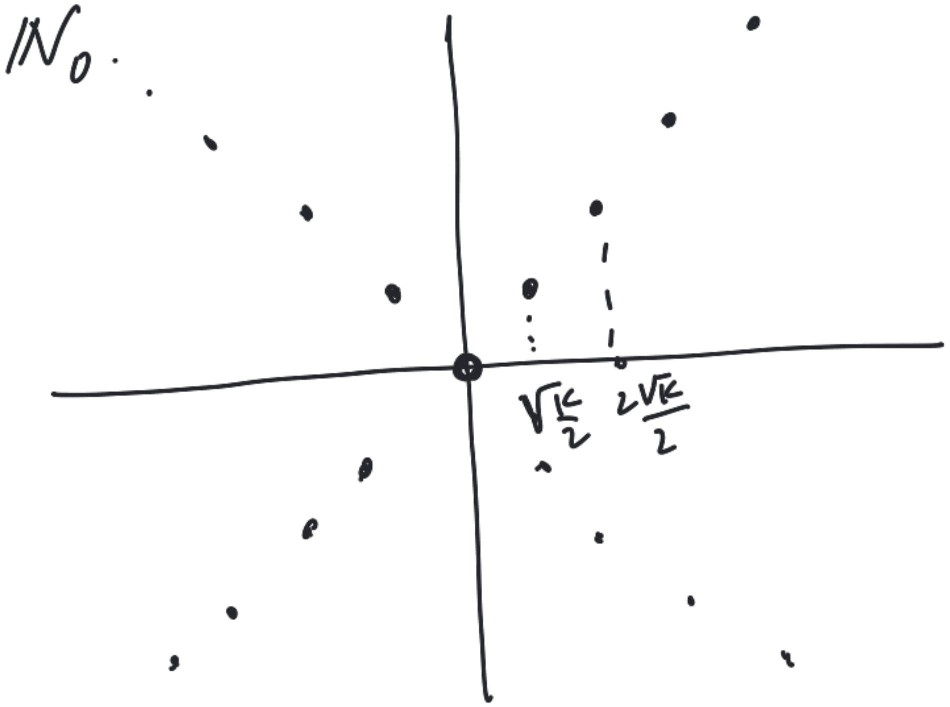
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi(x^2 - y^2) = 0 \\ 4\pi xy = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = \frac{k}{2} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = \frac{k}{2} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -y \\ -y^2 = \frac{k}{2} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}_0$$

Essendo $f(z) = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{g'(z)}{g(z)}$, con $g(z) = e^{2\pi z^2} - 1$, per il principio dell'argomento, le singolarità di f di f corrispondono ai zeri di g.

I zeri di g sono quindi i punti del piano complesso del tipo $z = \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \pm i\sqrt{\frac{k}{2}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.



Il principio dell'argomento garantisce anche che queste singolarità sono poli semplici di residuo uguale all'ordine dello zero.

Essendo $g'(z) = 4\pi z e^{2\pi z^2}$, $g'(z) \neq 0$, $\forall z$ quindi i zeri sono di ordine 1. Otteniamo quindi che la parte principale di $\frac{g'(z)}{g(z)}$ in $z_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \pm \sqrt{\frac{k}{2}}$ è $\frac{1}{z-z_0}$, quindi la parte principale di $f(z) = \frac{1}{4\pi}\frac{g'(z)}{g(z)}$ è $\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{z-z_0}$.